www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

JAARGANG 24, 1962, no. 4/5 blz. 101-164 Verschenen 23 Oktober 1962

Philips Technisch Tijdschrift

BEHANDELEND TECHNISCHE VRAAGSTUKKEN
SAMENHANGENDE MET DE PRODUKTEN, WERKWIJZEN EN ONDERZOEKINGEN
VAN DE N.V. PHILIPS' GLOEILAMPENFABRIEKEN

In dit nummer van ons tijdschrift zijn een aantal artikelen bijeengebracht die van verschillende afdelingen van Philips afkomstig zijn maar die een gemeenschappelijk thema behandelen: ze illustreren de functie die de elektronische rekenmachine vervult als hulpmiddel in wetenschap, techniek en economie, voor speurwerk en voor routinewerk. Deze functie is reeds zeer belangrijk — we behoeven dit niet meer te betogen — en wint nog voortdurend aan belang, in een zodanig tempo dat over enkele jaren een selectie van artikelen als in dit nummer wellicht weinig zin meer zal hebben: de elektronische rekenhulp zal dan misschien even algemeen geworden zijn als nu de rekenschuif en de tafelrekenmachine.

Sinds de oprichting van Philips' Rekencentrum — van welk instituut bovenstaande foto een der afdelingen toont — zijn honderden problemen met elektronische rekenmachines aangepakt. In dit nummer is ernaar gestreefd, een indruk te geven van de verscheidenheid van vraagstukken waarmee men zich hier bezighoudt: de selectie omvat het ontwikkelen van een klaverbladcyclotron, het verwerken van orders voor golfkarton, het berekenen van potentiaalvelden en elektronenbanen, het construeren van magneten voor luidsprekers. Bovendien demonstreren de geselecteerde problemen de verscheidenheid van wiskundige detailtaken die de rekenmachine te vervullen krijgt. Een drietal korte artikelen in dit nummer behandelen minder vaak beschouwde aspecten van de rekenmachine: één geeft een glimp van de historie van het automatisch rekenen; één bespreekt de oplossing van een puzzel, als voorbeeld van een niet-rekenkundig probleem — speels, maar leerrijk; het laatste brengt op een onverwachte wijze de machine nader tot de lezer, met behulp van een grammofoonplaatje.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

British Crown Copyright, Science Museum, Londen

DE REKENMACHINE VAN BLAISE PASCAL

681.14(091)

De digitale elektronische rekenmachine PASCAL in Philips' Rekencentrum is zo genoemd ter ere van de Franse wiskundige en wijsgeer Blaise Pascal [1]), die in het jaar 1642, op achttienjarige leeftijd, te Rouen een rekenmachine construeerde. Hij wilde met dit apparaat, de „Pascaline", het werk van zijn vader vergemakkelijken, die als belastingambtenaar veel te cijferen had. Hoewel Pascals belangstelling nadien in hoofdzaak naar andere dingen uitging, heeft hij gedurende zijn korte leven (hij overleed in 1662, juist 300 jaar geleden) toch een groot aantal exemplaren van zijn rekenmachine laten vervaardigen [2]), in telkens verbeterde vorm: in 1645 presenteerde hij een exemplaar aan de kanselier Pierre Séguier, door wiens toedoen hij in 1649 een koninklijk privilege op zijn uitvinding kreeg; in 1647 toonde hij er een aan Descartes; in 1652 had hij eindelijk een uitvoeringsvorm gevonden die hem goed voldeed; hij stuurde een exemplaar hiervan aan Koningin Christina van Zweden; een ander exemplaar demonstreerde hij persoonlijk voor een hoog gezelschap te Parijs — met succes, getuige een dichterlijke ontboezeming van een tijdgenoot [3]).

Een exemplaar van de Pascaline uit 1652 is zeer goed bewaard gebleven en bevindt zich in het Conservatoire des Arts et Métiers te Parijs. De titelfoto is gemaakt van een replica hiervan in het Science Museum te Londen. In het Conservatoire te Parijs vindt men nog drie andere exemplaren; alle vier dragen het wapen van de familie Pascal (zie *fig. 1*).

Reeds vóór Pascals machine bestonden er diverse mechanische hulpmiddelen voor het uitvoeren van rekenwerk, zoals de aloude abacus en de in het jaar 1617 door Neper uitgevonden rekenstaafjes. Pascal echter ging met zijn machine een essentiële stap verder: deze machine bevatte een discontinu werkend mechaniek — het „sautoir" — dat bij het optellen automatisch voor elke cijferplaats de eventueel nodige overdracht naar de naburige hogere

[1]) W. Nijenhuis, De „PASCAL", een zeer snelle digitale elektronische rekenmachine voor Philips' Rekencentrum, Philips techn. T. **23**, 1-19, 1961 (no. 1). — Niet onvermeld mag blijven dat volgens sommigen de naam als afkorting te beschouwen is van Philips Automatic Sequence CALculator.

[2]) Volgens Nilsson meer dan 50. Zie: R. S. Nilsson, The Pascal arithmometer and other means to solve mathematical problems, Voordracht voor The Newcomen Society, Londen, 16 febr. 1944.

[3]) Muse historique, Loret, van 14 april 1652 (zie het in [4]) aangehaalde boek, blz. 110):

„Je me rencontrai, l'autre jour
Dedans le petit Luxembourg,
Auquel beau lieu que Dieu bénie
Se trouva grande compagnie,
Tant duchesses que cordons-bleus,
Pour voir les effets merveilleux
D'un ouvrage d'arithmétique
Autrement de mathématique,
Où, par un secret sans égal,
Son rare auteur nommé Pascal
Fit voir une spéculative
Si claire et si persuasive,
Touchant le calcul et le jet,
Qu'on admira le grand projet.
Il fit encor sur des fontaines
Des démonstrations si pleines
D'esprit et de subtilité
Que l'on vit bien, en vérité,
Qu'un très beau génie il possède
Et qu'on le traita d'Archimède."

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

cijferplaats teweegbracht (*fig. 2*). Dit is de basis van alle digitale techniek en de logische consequentie van het digitale of positie-stelsel voor het schrijven van getallen.

De tijdgenoten van Pascal beseften de draagwijdte van zijn idee. Zijn zuster Gilberte drukte het, over de „machine arithmétique" sprekend, aldus uit [4]): „Cet ouvrage a été considéré comme une chose nouvelle dans la nature, d'avoir réduit en machine une science qui réside tout entière dans l'esprit, et d'avoir trouvé le moyen d'en faire toutes les opérations avec une entière certitude, sans avoir besoin du raisonnement". Men voelde een soort ongerustheid of verbazing, die heden ook velen van ons bekruipt — niet meer ten overstaan van het automatisch rekenen van de Pascaline, maar wel ten overstaan van de automatisering die onze gehele functie van logisch denken door toepassing van de elektronische rekenmachine schijnt te kunnen ondergaan. Overigens gaat Gilberte Pascal verder: „Ce travail le fatigua beaucoup, non pas pour la pensée ni pour le mouvement, qu'il trouva sans peine, mais pour faire comprendre aux ouvriers toutes ces choses". Inderdaad mag men aannemen dat de realisatie van Pascals uitvinding zeer bemoeilijkt werd doordat de scholing van de toenmalige instrumentmakers, en wellicht ook hun uitrusting, ontoereikend was om zulke ingewikkelde werkstukken met de vereiste nauwkeurigheid te vervaardigen. Geen van de exemplaren van de Pascaline schijnt lange tijd zonder fouten te hebben gewerkt, en de fabricage en verspreiding van rekenmachines op enigszins grote schaal moest wachten op perfectionering van het mechanisme en op een algemene stijging van het technische niveau.

[4]) Pascal, Pensées et Opuscules, éd. par L. Brunschvicg, Hachette, Parijs 1945 (blz. 10).

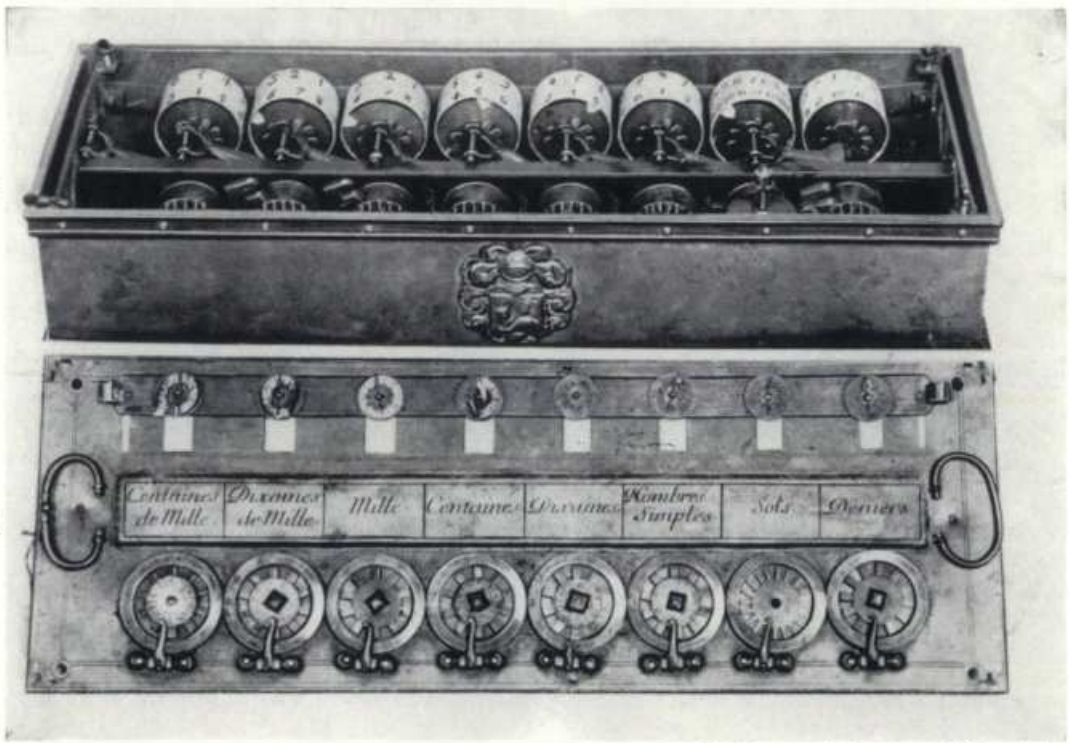


Foto Conservatoire des Arts et Métiers, Parijs

Fig. 1. Een der vier exemplaren van Pascals rekenmachine die in het Conservatoire des Arts et Métiers te Parijs worden bewaard. Dit exemplaar was, evenals verschillende andere, bestemd voor het optellen van geldsbedragen tot 1 miljoen livres; hiervoor zijn zes decimale cijferplaatsen aanwezig, terwijl dan nog een zevende „cijfer"-plaats met 20 eenheden de sous voor zijn rekening neemt en een achtste „cijfer"-plaats met 12 eenheden de deniers (de indeling die in de Engelse munt, met ponden, shillings en pence, tot heden gehandhaafd is). Op het afgenomen deksel (*b*) ziet men de indeling duidelijk op de acht kiesschijven, die dienen voor het instellen van de cijfers van een op te tellen bedrag.

Het is wel opmerkelijk dat reeds de oudste rekenmachines op deze wijze demonstreren dat het digitaal rekenen niet gebonden is aan het decimale cijferstelsel. Het voor de elektronische rekenmachines gebruikelijke binaire cijferstelsel [1]) is slechts weer een andere variant.

Wat de werking van de machine betreft, het volgende. Men bedient elk der acht kiesschijven door insteken van een stift en draaien tot de aanslag. In de acht vensters bovenaan het deksel, waaronder de in (*a*) zichtbare cijferwalsen draaien, verschijnt dan het ingestelde getal, en vervolgens, bij instellen van het volgende getal, het resultaat van de optelling. De overdracht van elk tiental (en resp. twaalftal of twintigtal) naar de eerstvolgende hogere cijferplaats gebeurt hierbij automatisch.

Om te kunnen aftrekken, moet de lat met de acht „geheugenradertjes", die boven de vensteropeningen loopt, omlaag geschoven worden; daardoor komen de bovenste helften van de vensters vrij en worden de in tegengestelde richting oplopende cijfers (de complementen van resp. 10, 12 of 20) op elk der trommels van (*a*) zichtbaar. Het instellen en aftrekken van een getal gebeurt dan door draaiing van de kiesschijven in dezelfde richting als eerst bij het optellen. Deze methode had Pascal bedacht omdat zijn „sautoir" voor de overdracht (zie fig. 2) slechts in één richting kon werken.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

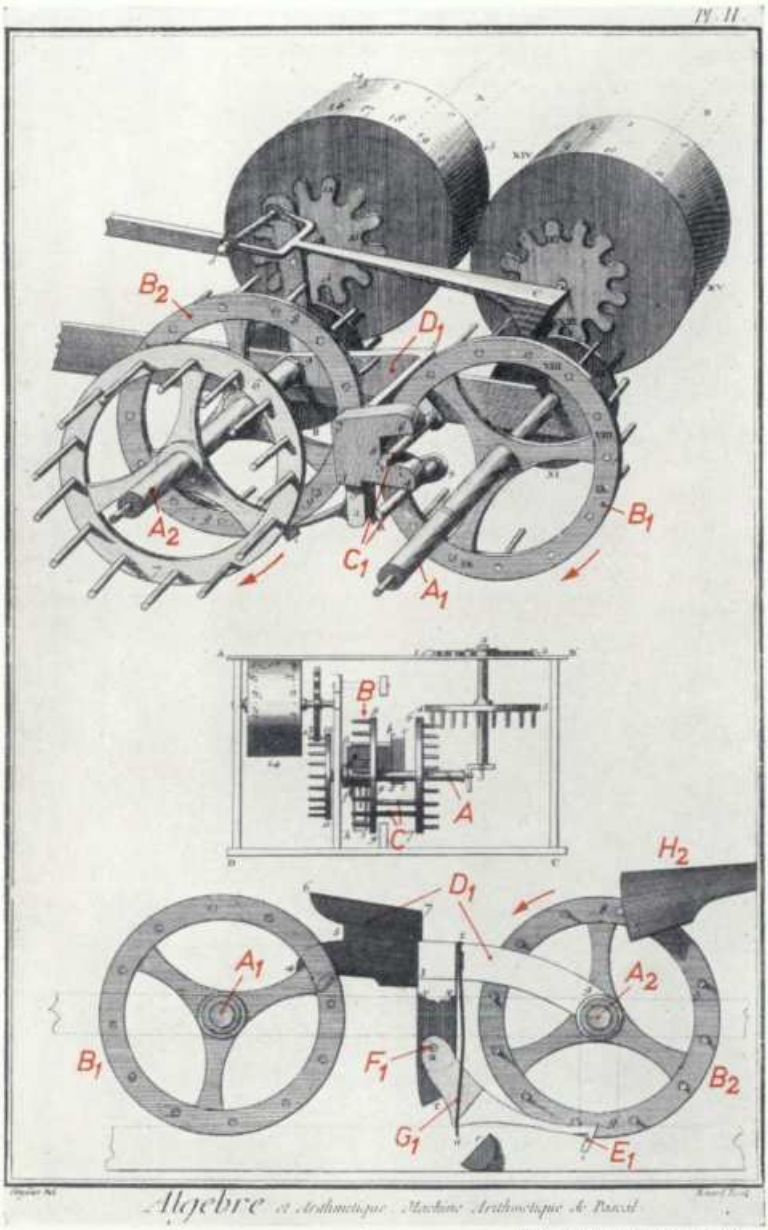


Foto Science Museum, Londen

Fig. 2. Mechaniek voor automatische overdracht van de tientallen in Pascals rekenmachine. De tekening is een reproduktie uit de Encyclopédie van Diderot en d'Alembert, Parijs 1752-1777. Enkele letters voor de aanduiding van onderdelen hebben wij hier rood ingedrukt. Hiermee kunnen we de werking van het mechaniek (het „sautoir") globaal als volgt beschrijven. De doorsnede in het midden toont alle onderdelen voor één cijferplaats, men herkent hierin de kiesschijf (rechts boven, *op* het deksel) en de cijferwals (links boven, *onder* het deksel). De beweging van de kiesschijf wordt door twee paar tandwielen (of „pinwielen") via de as A overgebracht op de cijferwals. Het middelste pinwiel B op deze as dient voor de overdracht der tientallen. In de bovenste tekening ziet men het pinwiel B_1 van een cijferplaats en het pinwiel B_2 van de aansluitende hogere cijferplaats. Tegen het einde van een volle omwenteling van het wiel B_1 grijpen de hieraan bevestigde twee pinnen C_1 in de twee tanden van de dubbel geknikte hefboom D_1, die om as A_2 draait, en tillen de hefboom op. Voltooit B_1 nu zijn omwenteling (d.w.z. wordt dit tiental compleet), dan laten de verderdraaiende pinnen C_1 de tanden van D_1 los, de hefboom valt omlaag en een aan de hefboom zittende pal E_1 drijft het pinwiel B_2 één stap verder. Dit wordt verduidelijkt door de onderste tekening, waar dezelfde onderdelen van de andere kant af zijn gezien. De arm van de pal E_1 scharniert om het asje F_1 en wordt door de bladveer G_1 omhooggetrokken, zodat de pal bij de valbeweging van D_1 kan aangrijpen op een pin van B_2, terwijl bij de omhoogbeweging van D_1 (en ook bij een zelfstandige draaiing van B_2) de pinnen langs de arm kunnen afglijden. Om bij de omhoogbeweging van D_1 geen meedraaien van B_2 in de verkeerde richting te krijgen, is de vangpal H_2 aangebracht, die deze draaiing in alle gevallen verhindert.

Enkele etappes in deze verdere ontwikkeling stippen we nog aan. In Engeland construeerde Morland in 1666 een rekenmachine, de „cyclograaf" (exemplaren hiervan worden o.a. in Londen en Florence bewaard), die ten opzichte van de Pascaline een stap terug betekende: de machine werkte volgens hetzelfde principe — optellen van cijfers door na elkaar uitvoeren van draaiingen van een soort kiesschijf over discreet instelbare hoeken —, maar de overdrachten gebeurden hier niet automatisch. In het jaar 1672 begon Leibniz in Hannover, later in Parijs, zich bezig te houden met een rekenmachine, die op een nieuw idee, het „Sprossenrad", was gebaseerd en waarmee men ook kon vermenigvuldigen en delen. Met behulp van verschillende instrumentmakers heeft hij vele jaren aan deze machine gewerkt. Pas in 1694 kwam ze klaar, maar ze schijnt niet betrouwbaar te hebben gefunctioneerd. De machine bevindt zich nog te Hannover, een replica vindt men in het Deutsches Museum te München. Poleni in Padua ging in 1709 van hetzelfde principe uit als Leibniz en bedacht een nieuwe, zeer doelmatige, constructie voor de automatische overdracht — vrijwel dezelfde constructie wordt nu nog in al onze mechanische telwerken toegepast, zoals in kilometertellers, gas- en elektriciteitsmeters, enz. Een houten model van zijn rekenmachine stelde Poleni echter zo teleur dat hij het vernielde. Beter ging het met een machine die in 1727 door Antonius Braun werd geconstrueerd en die op het gebruik van een soortgelijk element als de machines van Leibniz en Poleni berustte [5]). Deze machine (*fig. 3*) is zeer zorgvuldig en nauwkeurig afgewerkt — Braun was blijkbaar uitvinder en uitvoerder tegelijk — en maakt de indruk dat zij goed kan hebben gefunctioneerd, hoewel de bediening ons niet eenvoudig voorkomt. Na nog ettelijke andere tussenstappen verschijnt dan in 1820 voor het eerst een rekenmachine die op

[5]) J. Nagler, Beschreibung der Rechenmaschine des Antonius Braun, Blätter für Technikgeschichte, no. 22, blz. 81-87, Springer, Wenen 1960.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

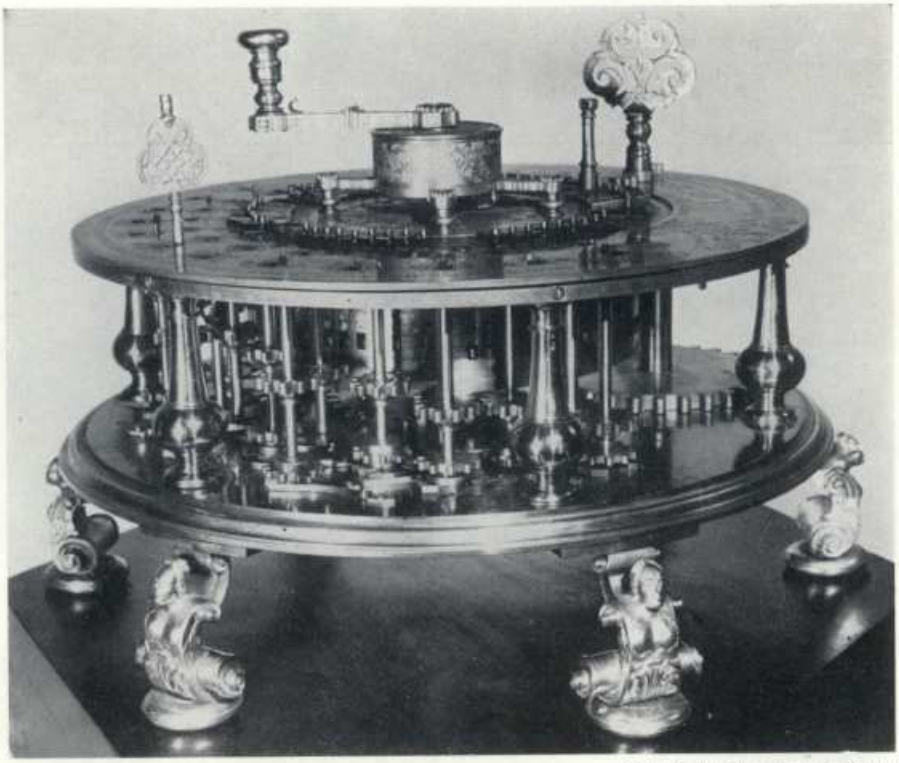


Fig. 3. Rekenmachine van Antonius Braun uit het jaar 1727. De machine was als hulpmiddel voor landmeterswerk bedoeld, men kon ermee optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Of zij goed heeft voldaan, is niet bekend. De foto toont de machine zonder de ringvormige wand die het rekenmechaniek tegen stof beschermt. Op de bovenplaat van de machine, met instelorganen en afleesraampjes voor de getallen, bevindt zich een uitvoerige Latijnse inscriptie, waarin de maker („Opticus Et Mathematicus") het instrument allernederigst opdraagt aan Keizer Karel VI. Het instrument bevindt zich in het Technisches Museum für Industrie und Gewerbe te Wenen [5]).

Foto Technisches Museum, Wenen

commerciële basis wordt gefabriceerd: het is de machine van Charles Xavier Thomas te Colmar, die bijna 100 jaar lang in weinig veranderde vorm op de markt bleef.

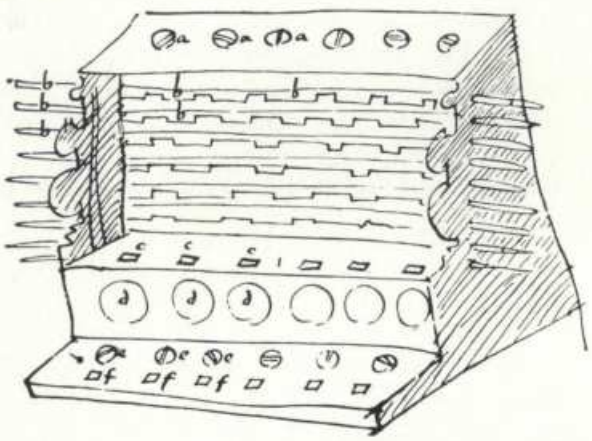


Fig. 4. Schets van de rekenmachine van W. Schickard, in zijn brief van 25.2.1624 aan Kepler. De op de machine betrekking hebbende tekst luidt (vertaald uit het Latijn): „Het aritmetische toestel zal ik een andere keer nauwkeuriger beschrijven, voor deze keer kortheidshalve alleen het volgende: *aaa* zijn de boveneinden van staande cilinders, waarop de vermenigvuldigingen van de cijfers zijn geschreven, en deze [cijfers] zijn, voor zover als nodig, door de verschuifbare raampjes *bbb* zichtbaar. Aan *ddd* zijn binnen wieltjes met 10 tanden bevestigd, die zo in elkaar grijpen dat, als er een willekeurig rechter wieltje 10 keer ronddraait, het links hiervan volgende wieltje één keer; of als het eerstgenoemde 100 keer gedraaid wordt, het derde wieltje één keer rondgaat etc. En wel [alle] in dezelfde richting; om dit klaar te spelen, was een identiek tussenwieltje *h* nodig. Elk willekeurig tussenwieltje brengt alle links ervan in beweging, in de vereiste verhouding; maar géén rechts ervan, wat speciale maatregelen nodig maakte. Het getal op deze wieltjes wordt zichtbaar door de gaten *ccc* in de middenlijst. Ten slotte duiden op de onderste lijst *e* draaiknoppen en *f* wederom gaten voor het verschijnen van cijfers aan, die men tijdens het werken gebruikt."

We mogen deze schets van de oudste historie der rekenmachine niet besluiten zonder erop te wijzen dat Hammer en v. Freytag-Löringhoff [6]) enkele jaren geleden een voorganger van de Pascaline aan het licht hebben gebracht: de hebraïcus, astronoom en wiskundige Wilhelm Schickard te Tübingen heeft reeds in 1623, dus 20 jaar vóór Pascal, een rekenmachine geconstrueerd waarmee men blijkbaar met automatische overdracht kon optellen en aftrekken (zelfs afwisselend, wat bij de Pascaline niet mogelijk was) en die bovendien een inrichting bevatte om het vermenigvuldigen en delen te vergemakkelijken. In twee brieven aan Kepler, gedateerd 20.9.1623 en 25.2.1624, vermeldt en beschrijft Schickard zijn uitvinding (*fig. 4*), en op grond van deze beschrijving en een in Schickards nagelaten papieren gevonden schets heeft men een reconstructie van de machine kunnen maken. In tegenstelling met Pascal echter heeft Schickard met zijn machine blijkbaar niet de aandacht van zijn tijdgenoten getrokken. Het tweede, verbeterde, exemplaar dat hij liet maken, werd vóór de voltooiing door een brand vernield, en de uitvinding is, vermoedelijk mede door de oorlogstoestand en door het spoedige overlijden van Schickard (hij stierf in 1635 met zijn hele gezin aan de pest), dadelijk in vergetelheid geraakt.

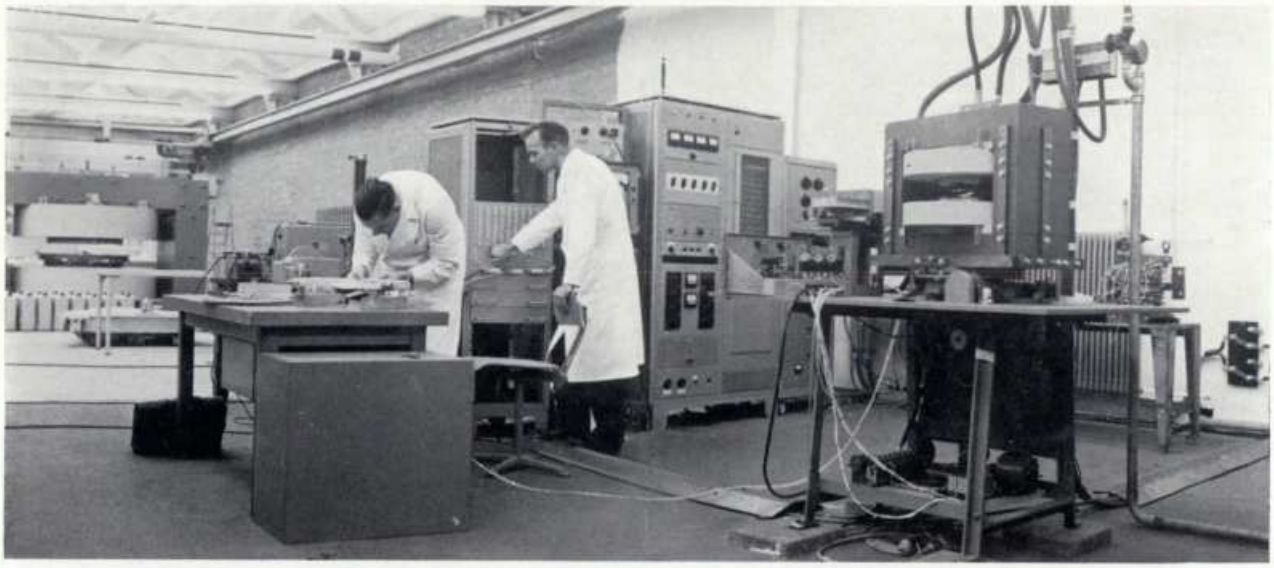
S. GRADSTEIN *).

[6]) B. v. Freytag-Löringhoff, Wiederentdeckung und Rekonstruktion der ältesten neuzeitlichen Rechenmaschine, VDI-Nachrichten **14**, no. 39, 21 dec. 1960, blz. 4.

*) Philips' Natuurkundig Laboratorium, Eindhoven.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023



ONDERZOEK VAN HET MAGNEETVELD VAN EEN ISOCHROON CYCLOTRON

door N. F. VERSTER *) en H. L. HAGEDOORN *). 621.317.42:621.384.611.2

De uitvinding van het cyclotron door Lawrence was gebaseerd op het feit dat ionen met een gegeven massa door een homogeen magneetveld op cirkelvormige banen worden gedwongen, waarop zij rondlopen met constante omloopstijd, onafhankelijk van hun snelheid. De ionen kunnen daardoor met behulp van een hoogfrequent wisselend elektrisch veld (ter plaatse van de spleet tussen de „Dees") tot steeds grotere snelheid worden opgezweept (*fig. 1*). In dit tijdschrift is reeds herhaaldelijk uiteengezet [1]) waarop dit ten slotte vastloopt: met toenemende energie van de ionen begint de relativistische toeneming van hun massa merkbaar te worden; deze bedraagt voor protonen 1% per 10 MeV. Ten einde de omloopstijd van de deeltjes desondanks constant te houden, zou het magneetveld naar buiten moeten toenemen. In de praktijk is echter juist een magneetveld nodig dat naar buiten enigszins afneemt. De ionen kunnen nl. in verticale en radiale richting om hun ideale (horizontaal gelegen) baan oscilleren en voor het stabiliseren van de verticale oscillatie moet het magneetveld enigszins tonvormig zijn, hetgeen een afneming in radiale richting inhoudt. Het niet constant blijven van de omloopstijd heeft tot gevolg dat de deeltjes de versnellingsspleet niet steeds blijven passeren op het moment waarop het elektrische veld zijn maximale versnellende waarde heeft (faze 0°), doch dat zij geleidelijk achter raken. Is de fazeachterstand opgelopen tot 90°, dan worden de deeltjes niet meer versneld. Door het gebruiken van een hoge Deespanning (100 kV of nog meer) kan men dit effect enigszins beperken, daar de deeltjes dan een gegeven energie met minder omwentelingen bereiken, maar verder dan tot 10 of 20 MeV voor protonen komt men aldus toch niet.

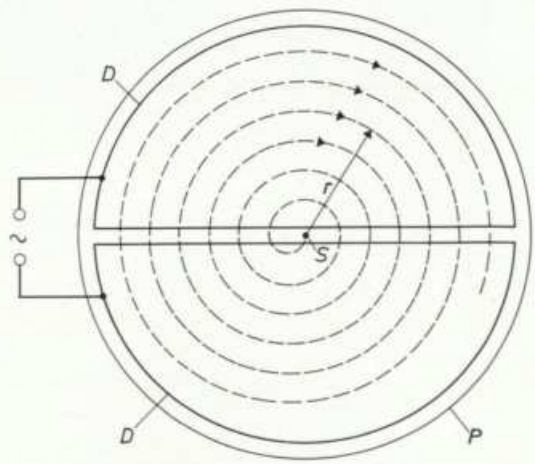


Fig. 1. Principe van het versnellen van ionen in een cyclotron. De door de bron *S* geleverde ionen worden versneld in het elektrische veld tussen de beide *D*-vormige elektrodes *D* (de zg. Dees). Onder invloed van een magneetveld (loodrecht op het vlak van tekening) beschrijven ze cirkelbanen, zodat ze de spleet telkens opnieuw kunnen passeren. De spanning op de Dees is een wisselspanning van zodanige frequentie dat het veld tussen de Dees in de tijd waarin de ionen een halve cirkel doorlopen, juist van richting is omgekeerd. *P* is de rand van een der magneetpolen.

*) Philips' Natuurkundig Laboratorium, Eindhoven.

[1]) Zie b.v. W. de Groot, Cyclotron en synchrocyclotron, Philips techn. T. **12**, 65-72, 1950.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

In het synchrocyclotron wordt de beschreven moeilijkheid omzeild door de frequentie van de versnellende spanning periodiek te variëren [1])[2]). Men verkrijgt dan niet een continue ionenstroom, doch een reeks korte pulsen. De eindenergie kan bij machines van dit type zeer hoog zijn: het grootste synchrocyclotron ter wereld levert protonen van niet minder dan 730 MeV.

Reeds in 1938 is door Thomas [3]) theoretisch aangetoond dat men tegelijkertijd de gewenste stabiliteit in verticale richting èn een constante omloopstijd kan verkrijgen indien men afstapt van de rotatiesymmetrische vorm van het magneetveld, dus van de gedachte dat de ideale banen der ionen cirkels moeten zijn. Het blijkt dat een sterke azimutale variatie van de magnetische inductie een zo grote bijdrage tot de verticale stabilisering kan geven dat de over een gesloten baan gemiddelde inductie — die ook hier de omloopstijd bepaalt — naar buiten toe zelfs mag toenemen. De realisering van het hiertoe vereiste magneetveld leek echter zo moeilijk dat men het principe van Thomas aanvankelijk niet praktisch dorst toe te passen. Door het naar voren komen van het principe van de zg. „strong focusing", dat in protonsynchrotrons wordt toegepast [4]) en dat enigszins op de beschreven gedachte van Thomas lijkt, en door de verdere ontwikkeling van deze gedachte door de Midwestern University Research Association [5]) is de belangstelling hiervoor hernieuwd. In 1958 is het eerste volgens dit principe functionerende cyclotron te Delft in werking gesteld [6]). Sindsdien zijn nog een vijftal van deze zg. isochrone cyclotrons gereed gekomen. De naam „isochroon" duidt op de constante omloopstijd; men spreekt ook wel van A.V.F.-cyclotrons (van Azimuthally Varying Field).

In het Philipslaboratorium te Eindhoven (afdeling te Geldrop) is onder de algemene leiding van A. C. van Dorsten een dergelijk cyclotron in aanbouw. Evenals in verschillende andere, reeds voltooide, isochrone cyclotrons zal het mogelijk zijn daarmee verschillende soorten ionen te versnellen tot een continu variabele eindenergie. Protonen zullen maximaal tot 25 MeV worden versneld [7]).

Bij de ontwikkeling van dit cyclotron, met name voor de nauwkeurige realisering van het vereiste magneetveld, is op grote schaal gebruik gemaakt van de elektronische rekenmachine PASCAL. In dit artikel beschrijven we, hoe hierbij te werk is gegaan. Daartoe gaan we eerst iets nader in op de theorie van de beweging der ionen in het ingewikkelde magneetveld, bespreken de consequenties van de variabele energie, beschrijven hoe het magneetveld wordt gemeten en hoe de metingen met behulp van de PASCAL zijn verwerkt, en ten slotte hoe we het gedrag van de deeltjes in het magneetveld hebben berekend om tot een nauwkeurige vastlegging van het veld te geraken [8]).

De beweging der ionen

We voeren cilindercoördinaten r, Θ, z in, met de z-as in de hartlijn van de magneetpolen en het vlak $z = 0$ in het mediane vlak tussen de polen.

In het rotatiesymmetrische veld van het klassieke cyclotron, met de inductie $B(r)$ in het mediane vlak, beschrijven ionen met massa m, lading e en snelheid v een cirkelvormige baan in dat vlak. Voor de straal r_0 van zulk een baan geldt:

$$r_0 B(r_0) = mv/e . \quad . . . . . \quad (1)$$

De hoeksnelheid is

$$\omega = v/r_0 = eB(r_0)/m , \quad . . . . \quad (2)$$

en men ziet dat deze (en dus ook de vereiste frequentie f van het versnellende veld) in een homogeen magneetveld inderdaad constant is zolang men de relativistische toeneming van m mag verwaarlozen. Brengt men deze toeneming in rekening, dan moet voor een constante hoekfrequentie de betrekking bestaan:

$$B(r) = \frac{m\omega}{e} = \frac{m_0\omega}{e\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx \frac{m_0\omega}{e}\,[1 + \tfrac{1}{2} r^2(\omega/c)^2]. \quad . . . \quad (3)$$

Men noemt dit verloop van $B(r)$ de isochrone veldvorm; we duiden het voortaan aan met het symbool $B_{is}(r)$. Voor de frequentie f_z van de oscillaties

---

[2]) Enige van de synchrocyclotrons die geheel of gedeeltelijk door Philips gebouwd zijn, vindt men beschreven in: F. A. Heyn, Philips techn. T. **12**, 245, 251 en 353, 1950 en F. A. Heyn en J. J. Burgerjon, Philips techn. T. **14**, 291, 1952 (deze artikelen betreffen het cyclotron te A'dam); W. Gentner e.a., Philips techn. T. **22** (no. 5) 1960 (drie artikelen over het 600-MeV-synchrocyclotron van de CERN; hiervoor heeft Philips de hoogfrequentie-installatie gemaakt); G. T. de Kruiff en N. F. Verster, Philips techn. T. **23**, 397, 1961 (no. 12) (betreft het 160-MeV-synchrocyclotron te Orsay).

[3]) L. H. Thomas, Phys. Rev. **54**, 580, 1938.

[4]) E. D. Courant, M. S. Livingston en H. S. Snyder, Phys. Rev. **88**, 1190, 1952 en **91**, 202, 1953.

[5]) Zie K. R. Symon, D. W. Kerst, L. W. Jones, L. J. Laslett en K. M. Terwilliger, Phys. Rev. **103**, 1837, 1959.

[6]) Zie F. A. Heyn en Khoe Kong Tat, Rev. sci. Instr. **29**, 662, 1958. Een uitvoeriger beschrijving geven dezelfde auteurs in: Sector-focused cyclotrons (Proc. Conf. Sea Island, Georgia, 2-4 febr. 1959), blz. 29-39. Zie ook Khoe Kong Tat, The isochronous cyclotron, diss. Delft, 1960.

[7]) Uitvoeriger gegevens vindt men in N. F. Verster e.a., Some design features of the Philips AVF prototype, Nucl. Instr. Meth., ter perse.

[8]) Zie ook N. F. Verster en H. L. Hagedoorn, Computer programs for an AVF cyclotron, Nucl. Instr. Meth., ter perse.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

die de ionen in verticale richting rondom de cirkel met straal r_0 (de zg. evenwichtsbaan) uitvoeren, vindt men [9]):

$$(f_z/f)^2 = -k, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

waarbij k de zg. veldindex is, gedefinieerd door:

$$k = \frac{r}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\log B}{\mathrm{d}\log r}.$$

Voor stabiliteit in verticale richting is nodig dat f_z reëel en dus $k < 0$ is. Dit maakt het onmogelijk, aan (3) te voldoen, en dit is dus de reden waarom men met het rotatiesymmetrische magneetveld vastloopt zodra de relativistische massatoeneming merkbaar wordt.

We vermelden nog dat de frequentie f_r der oscillaties in radiale richting gegeven wordt door:

$$(f_r/f)^2 = 1 - k. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Stabiliteit in radiale richting heeft men derhalve zolang $k < 1$ is.

Stapt men, zoals Thomas heeft voorgesteld, van de rotatiesymmetrie af, dan kan men het verloop van het magneetveld in het mediane vlak $z = 0$ heel algemeen beschrijven met een fourierreeks:

$$B(r,\Theta) = \overline{B}(r)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)\cos n\Theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r)\sin n\Theta\right],$$

of:

$$B(r,\Theta) = \overline{B}(r)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r)\cos n\{\Theta - \varphi_n(r)\}\right]. \quad (6)$$

Op de theorie van de beweging der ionen in zulk een veld kunnen we niet diep ingaan. De theorie leert in de eerste plaats dat stabiliteit in radiale richting slechts mogelijk is indien de eerste twee harmonischen afwezig of althans heel zwak zijn ($C_1 \ll 10^{-3}$ en $C_2 \ll 10^{-2}$). Om hieraan te voldoen, geeft men het magneetveld een vorm met een drie- of viertallige symmetrie om de z-as. In verg. (6) komen dan slechts termen voor waarbij n een veelvoud is van 3 (dus 3, 6, 9, ...) of van 4 (dus 4, 8, 12, ...). Voor ons cyclotron is een drietallige symmetrie gekozen; we beperken ons daarom verder tot dit geval, waarbij de term met $n = 3$ de laagste voorkomende (en de belangrijkste) is.

Om een magneetveld $B(r,\varphi)$ met drietallige symmetrie te verkrijgen, brengt men op ieder der beide magneetpolen drie stalen „heuvels" aan van ca. 60° breedte, waartussen zich dus dalen bevinden. De magneetpolen krijgen aldus een klaverbladachtige vorm, als in *fig. 2a*, en men spreekt daarom ook wel van klaverbladcyclotrons. In plaats van de cirkelbaan van het klassieke cyclotron (verg. 1) beschrijft een ion nu een enigszins driehoekige baan, aangezien de kromming van de baan ter plaatse van de heuvels groter is dan ter plaatse van de dalen. Er zij op gewezen dat de driehoekige baan de radiale grenzen tussen de heuvels en dalen niet loodrecht snijdt. In deze zes grensgebieden ziet men steeds, loodrecht op de baan gerekend, het veld naar buiten toe afnemen — juist de situatie die, zoals we bij het klassieke cyclotron gezien hebben, voor verticale stabiliteit nodig is. Aldus is kwalitatief te begrijpen dat in het AVF-cyclotron ondanks een naar buiten toenemend gemiddeld veld toch de vereiste stabiliteit te verkrijgen is (fig. 2*b*).

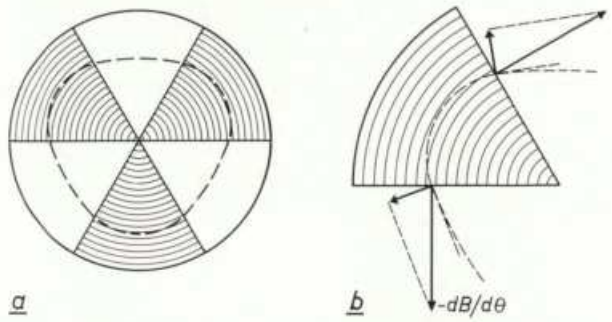


Fig. 2. *a*) Schematische voorstelling van een magneetveld met 3-tallige symmetrie. In de gearceerde sectoren is het veld sterker; de ionenbanen zijn daar dus sterker gekromd en krijgen zodoende een ietwat driehoekige vorm.
b) Daar een ion de grenzen tussen de sectoren niet loodrecht passeert, ontmoet het bij die grenzen een veld dat naar „buiten" toe afneemt. De pijlen representeren resp. de (negatieve) veldgradiënt en de component daarvan loodrecht op de getekende ionenbaan.

Het stabiliserende effect wordt nog versterkt als men de grenzen tussen de heuvels en dalen niet eenvoudig radiaal doch enigszins spiraalvormig laat lopen (*fig. 3a*); hierbij wordt de hoek tussen baan

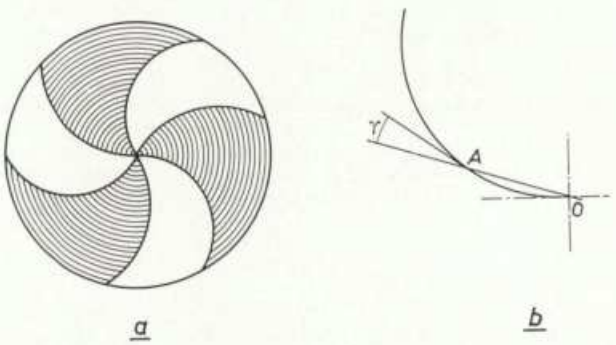


Fig. 3. Schematische voorstelling van een 3-tallig azimutaal variërend veld met sectoren die begrensd worden door spiralen. *a*) Overzicht van het veld. *b*) De spiraalhoek γ in het punt A van de spiraalvormige sectorgrens is de hoek tussen de straal en de raaklijn door A.

[9]) Deze formule volgt direct uit de bewegingsvergelijking van het ion. Zie b.v. [1]) of blz. 402 van het laatste der in [2]) aangehaalde artikelen. We wijzen erop dat daar de veldindex n anders is gedefinieerd dan hier: $n = -k$.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

en heuvelgrens dus afwisselend groot en klein. Deze vorm hebben we ook voor ons cyclotron gekozen. De fazehoek φ van elke fourierterm in verg. (6) zal dan inderdaad met r veranderen, en wel geldt $rd\varphi/dr = \mathrm{tg}\,\gamma$, waarin γ de in fig. 3*b* gedefinieerde spiraalhoek is.

De bewegingsvergelijkingen van een ion in een dusdanig ingewikkeld magneetveld als beschreven door verg. (6), kunnen niet exact worden opgelost. Dit is een der grootste problemen die de ontwerper van een isochroon cyclotron ontmoet. De elektronische rekenmachine heeft ook hier uitkomst gebracht. Wij hebben de banen door numerieke berekening met behulp van de PASCAL bepaald. De daartoe vereiste functies $\overline{B}(r)$, $A_3(r)$, $B_3(r)$, $A_6(r)$, $B_6(r)$, ..., waarmee het magneetveld wordt beschreven, zijn op hun beurt met de PASCAL berekend uit metingen van het magneetveld (fourieranalyse). Wegens de drietallige symmetrie behoefden de metingen slechts in één sector van 120° te geschieden, op een reeks cirkelbogen. (Enkele controlemetingen over 360° zijn gedaan om na te gaan of inderdaad de amplitude van de eerste en de tweede harmonische voldoende klein zijn, zie boven.) Uit de berekende banen zijn dan, wederom door de PASCAL, het voor isochronie vereiste veldverloop $\overline{B}_{is}(r)$, de bijbehorende hoekfrequentie ω en de oscillatiefrequenties f_z en f_r bepaald.

Als we hier spreken van „het" magneetveld, dat gemeten wordt en waarin de ionenbanen berekend worden, bedoelen we een in eerste instantie gerealiseerd veld, dat met de klaverbladpolen is verkregen. De uitkomsten van de berekeningen zijn natuurlijk juist het middel om de, voor isochronie vereiste, correcties te bepalen die op dit veld moeten worden aangebracht. Hierop gaan we in het volgende hoofdstuk nader in.

De geschetste berekeningen, die we straks nog nader zullen bespreken, zijn nogal omslachtig en tijdrovend, zelfs met de PASCAL. We hebben daarom ook aandacht geschonken aan de mogelijkheid om het cyclotron te ontwerpen, gebruik makend van een benaderde analytische oplossing van de bewegingsvergelijkingen in het klaverblad-magneetveld. De benaderingen die men moet invoeren om tot zo'n oplossing te kunnen komen, zijn echter zo ingrijpend dat de praktische bruikbaarheid ervan dubieus leek. De uitdrukkingen voor het isochrone veld, de hoekfrequentie en f_z (en f_r) zijn daarbij nog zeer ingewikkeld [10]). We vermelden slechts de belangrijkste termen van de gevonden formules:

$$\overline{B}_{is}(r) \approx \frac{m_0\omega}{e}\left[1 + \tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \tfrac{1}{16}C_3^2 - \tfrac{1}{32}\left(r\frac{dC_3}{dr}\right)^2\right], \quad (7a)$$

$$\omega \approx \frac{e\overline{B}}{m}\left[1 - \tfrac{1}{16}C_3^2 - \tfrac{1}{32}\left(r\frac{dC_3}{dr}\right)^2\right], \quad (7b)$$

$$(f_z/f)^2 = -k + (\tfrac{1}{2} + \mathrm{tg}^2\gamma)C_3^2 . \quad (8)$$

We hebben de complete uitdrukkingen, uitgaande van de reeds genoemde functies A_3, B_3, A_6, B_6, ... die door fourier-analyse van de magneetveldmetingen waren gevonden, voor alle gevallen numeriek uitgewerkt (wederom met behulp van de PASCAL). De overeenstemming van de zo gevonden $\overline{B}(r)$, f_z enz. met de eerder, zonder vereenvoudigende onderstellingen, berekende waarden bleek heel bevredigend, zodat het voor latere projecten toelaatbaar lijkt met de vermelde formules te werken.

In formule (8) ziet men het hierboven beredeneerde stabiliserende effect van het klaverblad-magneetveld kwantitatief beschreven: ook bij positieve veldindex (naar buiten toenemend veld) is verticale stabiliteit mogelijk mits de coëfficiënt C_3 maar groot genoeg is, en het spiraalvormig verlopen van de sectorgrenzen ($\gamma > 0$) helpt daartoe nog een handje mee.

Om een idee te geven van de voorkomende waarden, zij vermeld dat voor ons klaverbladcyclotron de veldindex van het isochrone veld maximaal +0,05 is. Verder is $C_3 \approx 0{,}3$ en $\gamma = 35°$. Hieruit volgt $(f_z/f)^2 = +0{,}04$.

Variatie van de eindenergie en de ionensoort

Wil men de door een cyclotron geproduceerde bundel energierijke ionen buiten de versnellingsruimte brengen — hetgeen voor de meeste kernfysische experimenten noodzakelijk is — dan moet men een bundel-extractiesysteem in het magneetveld aanbrengen [11]). Ionen met kleinere energie dan de maximale zijn in principe beschikbaar op kleinere baanstralen, maar het is in de praktijk niet mogelijk deze te extraheren door het extractiesysteem naar kleinere straal te verschuiven. Om de energie der ionen te variëren — hetgeen voor velerlei onderzoekingen gewenst is —, moet men ze derhalve op dezelfde baanstraal extraheren door de inductie B te veranderen, d.w.z. door de bekrachtiging van de magneet te wijzigen.

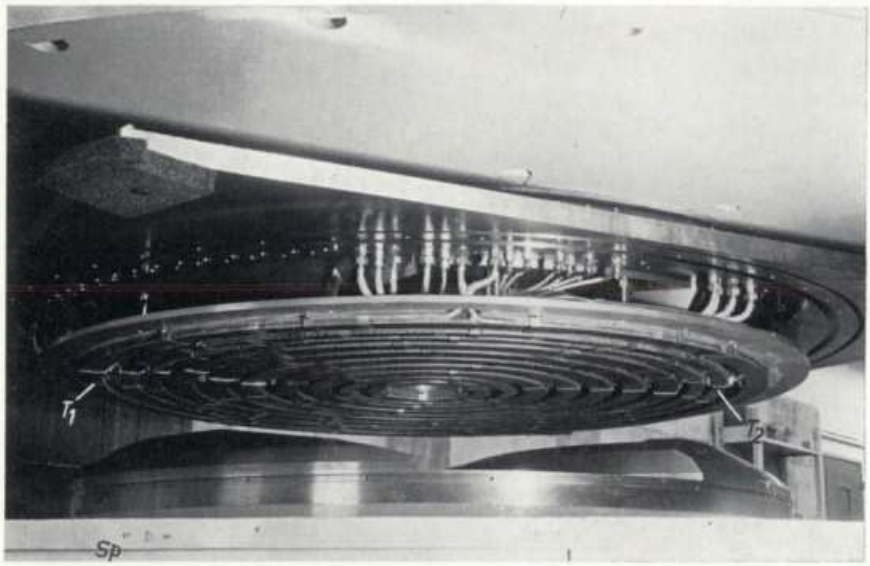
Deze methode, die bij enkele klassieke cyclotrons en bij de meeste isochrone cyclotrons, ook het onze, wordt toegepast, heeft belangrijke consequenties.

[10]) Men vindt de bewegingsvergelijkingen en de hier bedoelde benaderde analytische oplossing in H. L. Hagedoorn en N. F. Verster, Orbits in an AVF cyclotron, Nucl. Instr. Meth., ter perse.

[11]) Het ontwerp van een magnetisch werkend bundelextractiesysteem voor een synchrocyclotron is onlangs in dit tijdschrift beschreven in het laatste der in [2]) aangehaalde artikelen.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023



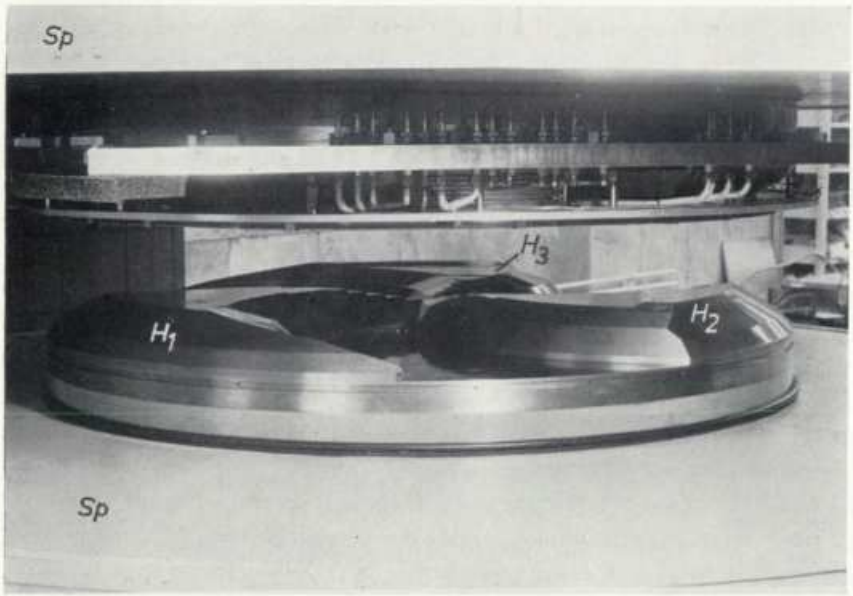


Fig. 4. In het in aanbouw zijnde isochrone cyclotron van Philips' Natuurkundig Laboratorium wordt het vereiste verloop van het magneetveld gerealiseerd met behulp van „heuvels" en „dalen" op de poolschoenen te zamen met tien paren concentrische hulpspoelen. Toen de foto's genomen werden, waren de hulpspoelen nog slechts op één poolvlak aangebracht. Op de onderste foto ziet men de vorm van de onderste magneetpool. Op de bovenste foto die tien concentrische hulpspoelen die zich op het bovenste poolvlak bevinden. *Sp* hoofdspoel van de magneet. H_1, H_2 en H_3 heuvels; daartussen de drie dalen. T_1 en T_2 de buitenste twee van de tien concentrische hulpspoelen.

In de eerste plaats varieert de omloopfrequentie ω evenredig met B (zie verg. 1); de hoogfrequentie-oscillator, die de Dee-spanning levert, moet dus afstembaar zijn. Op dit aspect zullen we hier niet ingaan.

Ten tweede verandert bij variatie van de bekrachtiging van de magneet het veldverloop $B(r)$ in het interferricum niet geheel gelijkvormig, ten gevolge van plaatselijke magnetische verzadiging van het staal van de poolschoenen. Hoewel we de zijkanten van de heuvels op de magneetpolen hebben afgeschuind, om sterke veldconcentraties op de ribben te vermijden en dus verzadiging zoveel mogelijk te beperken, is het effect nog merkbaar. Het effect is echter minder belangrijk dan men zou denken, daar uit anderen hoofde het gegeven veldverloop $B(r)$ bij overgang tot een andere eindenergie toch niet meer bruikbaar is. De oorzaak ligt niet bij de stabiliteit der banen — de, door magnetische verzadiging eventueel gewijzigde, fouriercoëfficienten $A_n(r)$ en $B_n(r)$ blijven normaliter wel groot genoeg om ook in de gewijzigde omstandigheden de verticale stabiliteit te verzekeren —, maar bij de isochronie.

Bij wijziging van de ionenenergie op de vaste eindcirkel verandert nl. het voor isochronie vereiste veldverloop (dit is de derde en belangrijkste consequentie), doordat de relativistische massatoeneming een andere functie wordt van de straal. Hetzelfde geldt als we verschillende soorten deeltjes willen versnellen, b.v. behalve protonen ook deuteronen en α-deeltjes. In ons cyclotron kunnen we, bij een inductie in de as van $B_0 = 1{,}4$ Wb/m², protonen versnellen tot 25 MeV; de gemiddelde inductie op de eindstraal moet dan 0,037 Wb/m² groter zijn, wegens de massatoeneming van 2,5%. Deuteronen worden met dezelfde B_0 versneld tot 12,5 MeV, de massatoeneming is dan ca. 0,6% en de gemiddelde inductie op de eindstraal moet nu slechts ca. 0,009 Wb/m² groter dan B_0 zijn. Om voor elke ionensoort en elke eindenergie het vereiste isochrone veld te realiseren, kan men dus toch niet volstaan met eenvoudige variatie van de bekrachtiging van de magneet, maar men moet extra hulpmiddelen gebruiken.

Wij hebben hiertoe tussen de beide magneetpolen 10 paren concentrische hulpspoelen aangebracht (zie *fig. 4*). Bekrachtiging van één paar van deze spoelen beïnvloedt $\bar{B}(r)$ in hoofdzaak alleen voor r-waarden kleiner dan de straal van de spoel. Met

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

de grootste spoel kan men een verandering van ca. 0,025 Wb/m² in B_0 teweeg brengen. Voor iedere gewenste ionensoort en eindenergie moet nu ieder der 10 spoelenparen (en de hoofdspoel zelf) op bepaalde wijze bekrachtigd worden. Veranderingen in de verzadiging van het magneetstaal worden hierbij „in één koop" gecompenseerd. Het bepalen van de vereiste bekrachtigingsstromen is in feite het voornaamste probleem waarover dit artikel handelt.

Er dient in het licht gesteld te worden dat hierbij een bijzonder grote nauwkeurigheid vereist is. Bij de vrij hoge waarde van 50 kV die we voor de Dee-spanning hebben gekozen, moet een proton toch nog 250 omlopen maken om een energie van 25 MeV te bereiken. Stel dat we $\bar{B}(r)$ doorgaans slechts $1^0/_{00}$ kleiner dan het vereiste isochrone veld hebben gemaakt. Met elke omloop raakt het ion dan 0,36° in faze achter bij de Dee-spanning, en na 250 omlopen is de achterstand tot 90° opgelopen. Het isochrone veld moet dus worden gerealiseerd met een nauwkeurigheid, aanmerkelijk beter dan 1 op 1000.

Deze eis brengt mede dat de metingen van het magneetveld in vrij veel punten moet geschieden. Aangezien de invloed van de te variëren bijdrage van ieder der 10 spoelenparen bij een aantal waarden (b.v. tien) van de bekrachtigingsstroom in de hoofdspoel moet worden nagegaan, komt men tot een enorm aantal metingen (ruim 100 000). Dit heeft ons genoodzaakt, een speciale techniek voor het meten, registreren en verwerken van de meetresultaten te ontwikkelen, die hieronder ook nader zal worden beschreven.

De meting van het magneetveld

Het magneetveld van het in Philips' Natuurkundig Laboratorium in aanbouw zijnde isochrone cyclotron is gemeten — men kan misschien beter zeggen: in kaart gebracht — met behulp van een automatisch werkend apparaat waarvan het eigenlijke meetelement gevormd wordt door een Hall-plaatje. Dit plaatje is bevestigd in een houder die bewogen kan worden langs een arm. Deze arm is draaibaar om een verticale as die zich in het centrum van het magneetveld bevindt (*fig. 5*). De verplaat-

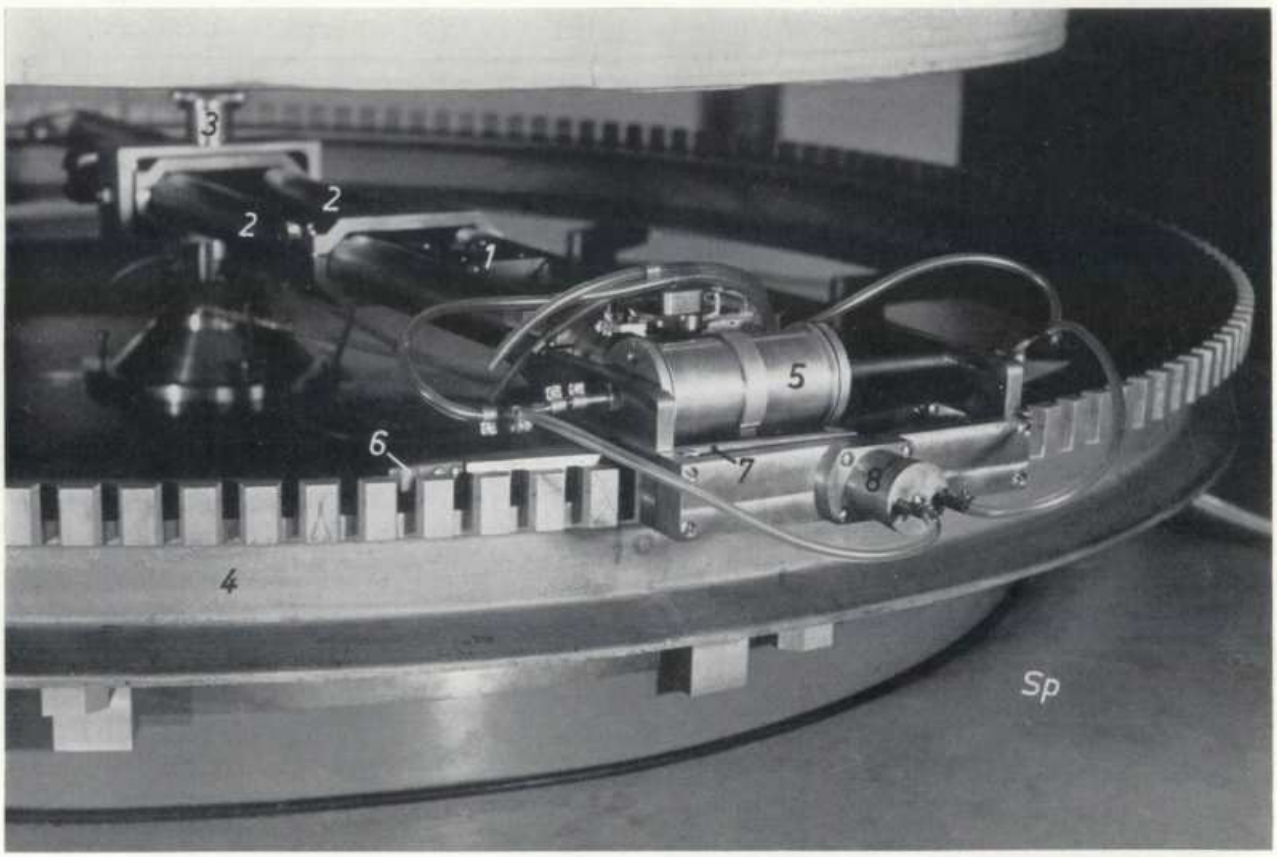


Fig. 5. De automatische apparatuur voor het meten van het magneetveld. Het meetelement, een Hall-plaatje, bevindt zich in de vatting *1* die radiaal verplaatst kan worden tussen de stangen *2* die samen de arm vormen. In het centrum van de magneet is de arm draaibaar om de verticale as *3*, aan de rand wordt hij gesteund door een getande aluminium ring *4*. Iedere tand correspondeert met een draaiing van 2°. De bediening geschiedt pneumatisch. Het draaien geschiedt door middel van de cilinder *5* en de pal *6*, het nauwkeurig fixeren in een bepaalde stand door een nok op de arm *7* die bediend wordt door de cilinder *8*. *Sp* is de bovenkant van de hoofdspoel die om de onderste magneetpool ligt.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

sing langs de arm kan geschieden in stappen van 2 mm (of een veelvoud daarvan), de draaiing van de arm geschiedt in stappen van 2°. Er kan ook gemeten worden in stappen van 4° of 6°.

Daar we het veld wilden meten met een precisie van ongeveer 1×10^{-4} Wb/m² (1 gauss) en de veldgradiënt bij de grenzen van de sectoren zeer groot is, moest de positie van het Hall-plaatje tot op ongeveer 0,05 mm nauwkeurig zijn. De azimutale positie van de arm is dan ook nauwkeurig tot op 12″. Deze precisie is bereikt door de arm aan de buitenzijde van de magneet te laten rusten op een getande ring. Bij de verplaatsing van de houder langs de arm wordt de vereiste precisie bereikt door middel van een geperforeerde bronzen band.

De verplaatsing van het Hall-plaatje geschiedt pneumatisch. Deze methode leent zich tegelijk voor automatisering en voor toepassing in een magneetveld. Met het apparaat wordt iedere 5 seconden een meting verricht. Het gebeuren in iedere cyclus van 5 s wordt gecommandeerd door een schakelwals. Het is zowel mogelijk een serie metingen te doen langs de omtrek van een cirkel (r = constant) als wel langs een bepaalde straal (Θ = constant). Eerder is een soortgelijk maar kleiner en eenvoudiger apparaat geconstrueerd. Dit is gebruikt voor het onderzoek van een modelmagneet (schaal 1 : 5), met behulp waarvan de gunstigste vorm van de heuvels en dalen van de magneetpolen is gezocht.

Het Hall-plaatje wordt gevoed met een stroom van 18 mA. De gevoeligheid is bij deze stroom ca. 3×10^{-2} Vm²/Wb (= 3 μV per gauss). De verkregen gelijkspanning wordt 300 maal versterkt met behulp van een trillerversterker („chopper amplifier"). Doordat in deze versterker een sterke tegenkoppeling is toegepast (5000×), is de versterkingsfactor zeer constant (1 : 10^4). De ruis in het uitgangssignaal correspondeert met ongeveer 1 μV. Een verschil in inductie van 1×10^{-4} Wb/m² is dus duidelijk te constateren.

Eveneens terwille van de precisie wordt de voedingsstroom van het Hall-plaatje zeer rigoureus constant gehouden (beter dan $1:3\times10^4$) en bevindt het plaatje zelf zich in een kleine thermostaat.

De ijking van het Hall-plaatje is geschied door dit plaatje en de meetsonde van een protonresonantieopstelling beurtelings in het veld van een hulpmagneet te brengen [12]). Dit veld werd daarbij achtereenvolgens zo ingesteld dat kernresonantie optrad bij 4 MHz en alle harmonischen hiervan t/m de 21e (bij 84 MHz dus). De inducties die bij de laagste en de hoogste frequenties behoren, zijn resp. 0,0940 en 1,9738 Wb/m². Door te werken met een reeks harmonischen, waren we ten aanzien van de lineariteit niet afhankelijk van de kwaliteit van de standaardoscillator. Samen met de aanwijzing die verkregen werd bij afwezigheid van een magneetveld, leverde deze procedure dus 22 ijkpunten.

Het verband tussen de inductie en de uitgangsspanning van het Hall-plaatje is op ca. 1% na lineair. Door de grote precisie die geëist wordt, moet het echter toch worden voorgesteld door een polynoom van niet minder dan de 7de graad. Regelmatige controle van de uitgangsspanning bij de grootste waarde van de resonantie-frequentie (84 MHz) heeft geleerd dat de apparatuur zeer stabiel is; slechts een enkele maal behoeft een kleine correctie te worden aangebracht. Dit geschiedt door de stroom door het Hall-plaatje zodanig te variëren dat de uitgangsspanning weer de oude waarde heeft. De inductie bij de lagere frequenties wijkt daarna minder dan 1×10^{-4} Wb/m² af van de vroegere waarde. Een indruk van de spreiding in de metingen door toevallige fluctuaties („meetruis") krijgt men uit *fig. 6*.

Het versterkte uitgangssignaal van het Hall-plaatje wordt toegevoerd aan een digitale voltmeter

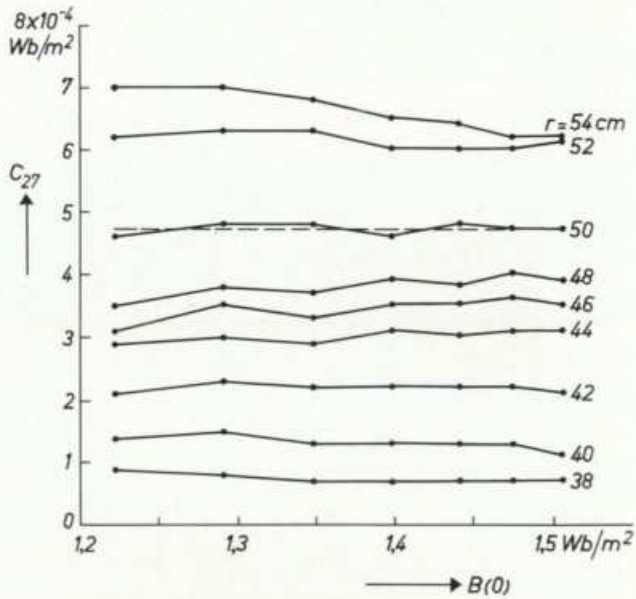


Fig. 6. De zeer geringe spreiding in de metingen blijkt o.a. uit het hier getoonde verloop, als functie van de bekrachtiging van de hoofdspoel, van de amplitude C_{27} van de 27e harmonische van de inductie langs cirkels met diverse stralen. Langs de abscis is uitgezet de inductie $B(0)$ in het centrum. De spreiding in de getekende punten is van de orde van 10^{-5} Wb/m² (men kan dit duidelijk zien aan de metingen bij r = 50 cm, waardoor een gladde kromme — i.c. een rechte — getrokken is). Daar ieder punt het gemiddelde is van 60 metingen, is de spreiding per meting dus ongeveer $10^{-5}\times\sqrt{60}\approx0{,}8\times10^{-4}$ Wb/m². (Hierbij moet wèl bedacht worden dat de gemiddelden niet verkregen zijn uit waarden die continu fluctueren, maar die door de digitale voltmeter „gequantiseerd" zijn in veelvouden van nagenoeg 1×10^{-4} Wb/m².)

[12]) Het meten van magneetvelden door middel van de kernspinresonantie van protonen vindt men o.a. beschreven in Philips techn. T. **14**, 341, 1952.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

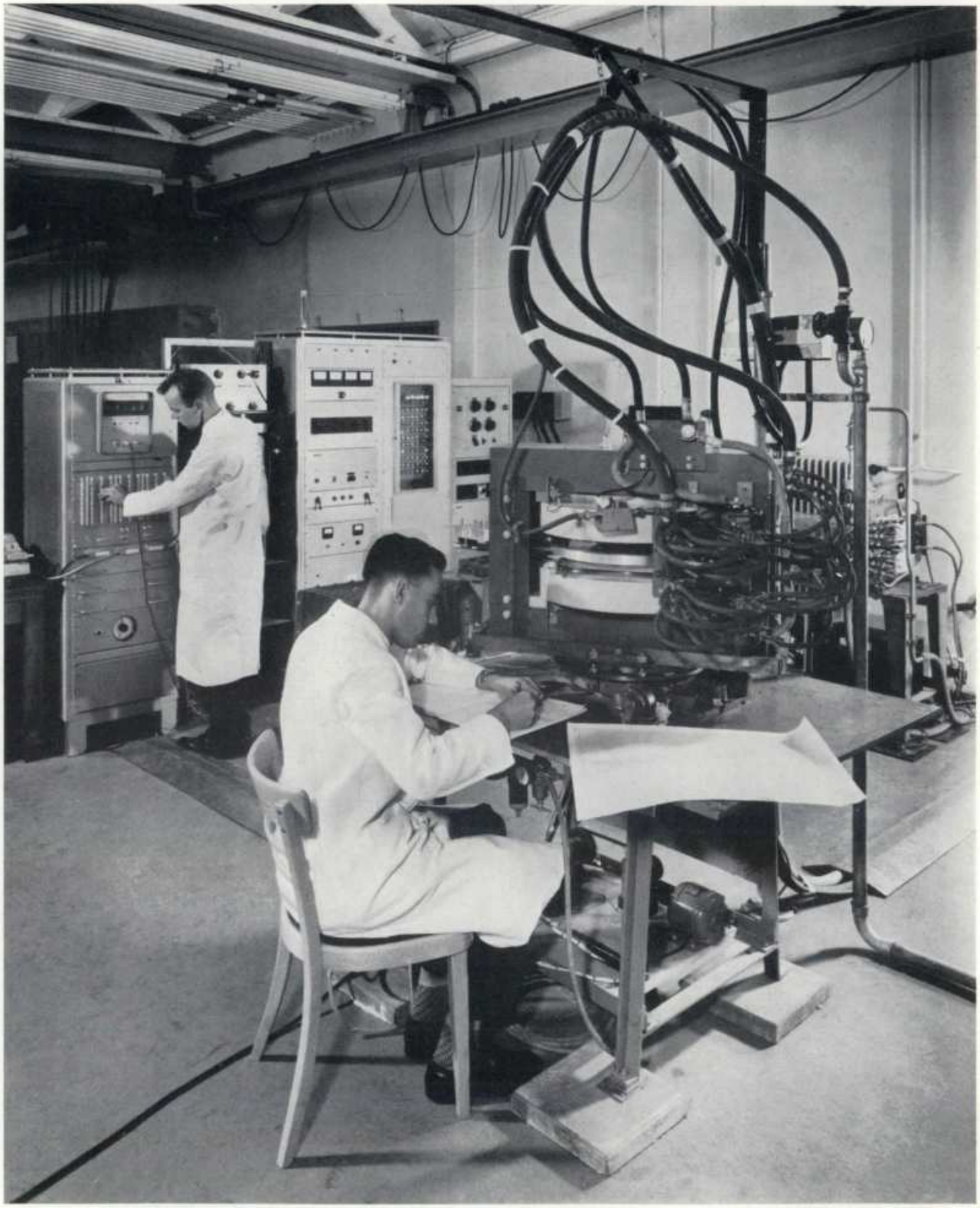


Foto Adolf Morath

Fig. 7. Het uitvoeren van veldmetingen aan de proefmagneet (voorgrond midden), waarmee de gunstigste vorm van de heuvels en dalen is gezocht. Het Hall-plaatje bevindt zich hier niet op een arm maar in een sleuf in de schijf die men tussen de polen van de magneet ziet. Boven in het meest linkse rek de digitale voltmeter en daaronder het paneel met toetsen voor het aanslaan van de „kop" die het mogelijk maakt de in een bepaalde band geponste meetserie te identificeren. De apparatuur in de andere rekken dient grotendeels voor het stabiliseren van de magneetstroom. Rechts deels zichtbaar de protonresonantieopstelling. De schakelwals die de veldmeetapparatuur commandeert (grotendeels onzichtbaar), bevindt zich onder de tafel die de magneet draagt.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

met vier cijfers, die een gevoeligheid heeft van 1 mV per eenheid. De apparatuur is zo ingesteld dat deze meter bij afwezigheid van een magneetveld —9995 aanwijst, en dat bij +9995 aanwijst bij een inductie van 2,0000 Wb/m². Eén eenheid komt dus vrijwel overeen met 1×10^{-4} Wb/m². De aanwijzing van deze meter wordt zowel automatisch uitgetikt als geponst in 5-kanaals ponsband (telexband). Dit ponsband is geschikt om te worden toegevoerd aan een rekenmachine. *Fig. 7* geeft een overzicht van de apparatuur tijdens metingen aan de modelmagneet.

Het onderzoek aan de genoemde modelmagneet (1:5) was nodig omdat het onmogelijk is de vereiste vorm van de heuvels en de dalen precies te berekenen. De vorm die de beste resultaten levert, moet empirisch gevonden worden door eerst aan enige modellen na te gaan hoe diverse grootheden met de vorm van de poolschoenen veranderen. Daarna moet men door „interpolatie" trachten verder te komen. Men kan daarbij beginnen met betrekkelijk ruwe modellen, de laatste echter moeten een precisie van ten minste 1 : 10^3 hebben. Uiteraard moeten bij de modelmagneet de ijzerkwaliteit en de inductie overeenstemmen met die welke men in het te bouwen cyclotron wil toepassen. Het vermogen dat de spoel van onze modelmagneet opneemt, moest daarom niet minder dan 25 kW bedragen.

Het identificeren van een meting; het opsporen van meetfouten

Ten einde de in een bepaalde band geponste meetserie te kunnen identificeren, wordt iedere band voorzien van een zg. „kop" van tien cijfers. De meetapparatuur is daartoe voorzien van een toetsenbord met tien kolommen van tien toetsen waarop de complete kop met de hand kan worden aangeslagen. Drukt men vervolgens op een knop dan wordt deze kop door de bandponser in de band geponst.

Het eerste cijfer van de kop karakteriseert het type van de meting (b.v. 2 = azimutale reeks, 5 = radiale reeks, 9 = ijkmeting), de volgende drie bevatten het volgnummer van het onderzochte veld, de daarop volgende drie de plaats (Θ voor een radiale en r voor een azimutale reeks), de volgende twee b.v. het interval, terwijl het laatste cijfer de te gebruiken ijkformule aangeeft. Een voorbeeld van een stukje band met een dergelijke kop vindt men in *fig. 8*. Voor het besturen van het hieronder te bespreken zg. ingangscontroleprogramma gebruiken we een kop met als eerste cijfer nul; het tweede cijfer specificeert de opdracht. Zo betekent 08: „verwerp de laatste meting", 05 $x_1 \ldots x_8$ betekent: „lees $x_1 \ldots x_8$ als positief getal en beschouw dit als meting".

Ook de ponsbanden waarop ijkmetingen geregistreerd zijn, worden van een kop voorzien. Deze kop bevat de datum en een getal voor identificatie.

Het automatisch verwerken van de meetresultaten maakt het mogelijk het zeer grote aantal meetpunten te verwerken, doch het stelt de onderzoeker voor een nieuw probleem. Bij verwerking met de hand is er altijd wel enigerlei controle op de geloofwaardigheid van de meetresultaten — maakt men b.v. een grafische voorstelling, dan blijkt direct of een meting onwaarschijnlijk sterk afwijkt. Bij automatische verwerking ontbreekt deze controle volledig.

De maatregelen die we hebben getroffen om te controleren of geen der punten van een meetserie onwaarschijnlijk veel afwijkt van een gladde kromme die men daardoor getrokken kan denken, bestaan erin dat we de beide programma's volgens welke de rekenmachine de veldmetingen verwerkt (zie hieronder), hebben uitgerust met een deel dat er voor zorgt dat ieder meetresultaat op een bepaalde manier wordt vergeleken met dat van de overige punten van dezelfde serie. Op deze wijze wordt ieder resultaat dat meer dan 2×10^{-3} Wb/m² (20 gauss) van de te verwachten waarde afwijkt, gedetecteerd en vervangen door een waarde die door interpolatie wordt afgeleid uit de waarden die gevonden zijn in de omringende punten. Tevens leveren deze programma's een indicatie omtrent de spreiding in de geaccepteerde waarden.

De diverse rekenprogramma's

We zullen thans een overzicht geven van de rekenprogramma's volgens welke de meetresultaten die de zojuist beschreven apparatuur levert, verwerkt

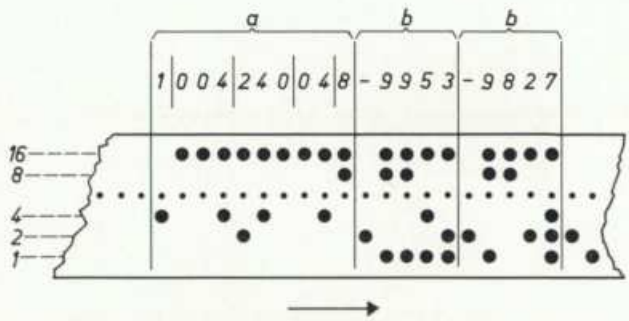


Fig. 8. Begin van een serie metingen zoals die op 5-kanaalsband geponst wordt. Ieder kolommetje is een getal (karakter). De band wordt per karakter gelezen in de richting van de pijl. De eerste tien karakters vormen de zg. „kop" *a* en karakteriseren de aard van de meting, het meetinterval enz. Ieder van de daarop volgende groepen van vijf karakters *b* vormt een getal van vier cijfers (een meetresultaat) voorafgegaan door een plus- of een minteken. De meetresultaten zijn dus niet volledig binair gecodeerd maar worden per (decimaal) cijfer geponst. De codering is als volgt. Een gat in het vijfde kanaal betekent: de rest van dit karakter is een getal. Ontbreekt dit gat, dan is de rest een codeteken; ingeval er b.v. een gat in het tweede kanaal geponst is, is dit teken een minteken; een gat in het eerste kanaal betekent: plusteken. Ten behoeve van het lezen van de band is het eerste cijfer van de kop afwijkend gecodeerd (géén gat in kanaal 5; ponsing is cijferwaarde plus 3). De kleine stippen stellen de transportgaatjes voor.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

worden. We beperken ons daarbij voor de overzichtelijkheid tot een korte uiteenzetting omtrent wat de programma's doen en wat daarvan de betekenis is. De wiskundige basis van enige van de programma's vindt men kort beschreven in het slothoofdstuk [13]). Het geheel van deze programma's vindt men aanschouwelijk voorgesteld in het blokdiagram van *fig. 9*. In dit diagram stellen de drie blokken *M* typen van meting voor, en de blokken *P* rekenprogramma's die door de rekenmachine PASCAL worden uitgevoerd. De verbindingslijnen *T* symboliseren het tijdelijk bewaren van een verkregen meet- of rekenresultaat in de vorm van ponsband, en het toevoeren daarvan aan een volgend programma.

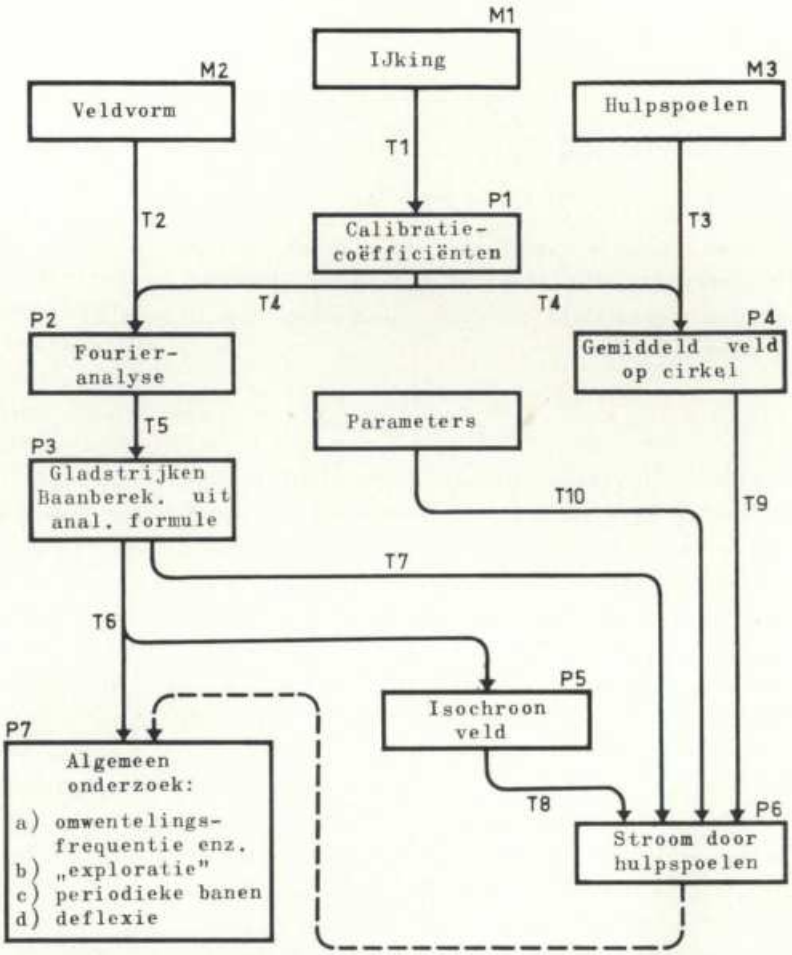


Fig. 9. Schematische voorstelling van de aard en de volgorde van die uitgevoerde berekeningen. De blokken *M* representeren metingen, de blokken *P* zijn de rekenprogramma's, de lijnen *T* symboliseren het bewaren van de met een zeker programma verkregen resultaten en het toevoeren daarvan aan een volgend programma.

De drie programma's *P1*, *P2* en *P4*, die de ponsbanden moeten verwerken welke men bij de diverse soorten van veldmetingen *M1* t/m *M3* verkrijgt, beginnen alle drie met het zg. ingangscontroleprogramma. Dit programma zorgt ervoor dat de machine de gelezen karakters decodeert, en dat hij onderzoekt of de toegevoerde band werkelijk een serie veldmetingen bevat, door de volgorde van de karakters te controleren. Er moet, zoals we beschreven, hetzij een „kop" gevonden worden, hetzij een van de voltmeter afkomstig getal van vier cijfers voorafgegaan door een plus- of minteken. Wanneer er, wat dit betreft, iets niet in orde is, wordt de meetserie verworpen. Zoals gezegd, bepalen de besturingsopdrachten (05, 08 enz., zie boven) welk deel van het ingangscontroleprogramma in een bepaald geval uitgevoerd moet worden.

Het controleren en identificeren van een band (ingangscontroleprogramma) gaat in hoofdlijnen als volgt in zijn werk:

1) Er wordt een karakter „gelezen" d.w.z. zodra het transportgaatje het leesstation van de machine passeert, wordt het karakter als binair getal overgebracht naar het rekenorgaan; de machine gaat na of dit getal groter of kleiner dan 16 is.
2) Is het kleiner dan 16 (d.w.z. ontbreekt het gat in kanaal 5), dan is het hetzij een plus- of een minteken, hetzij het begin van een „kop"; de machine onderzoekt dit nader.
   2.1) Is het 1 of 2, dan is het een plus- of minteken en moeten er vier cijfers volgen (kanaal 5 vier maal geponst); de machine controleert dit.
   2.2) Is het 3 t/m 12, dan is het het eerste karakter van een kop en moeten er nog negen cijfers volgen (kanaal 5 negen maal geponst); de machine controleert dit weer.
   2.3) Is het 13, 14 of 15, dan keurt de machine de meetserie af; deze drie getallen komen in de code niet voor.
3) Is het 16 t/m 25 (d.w.z. is er een gat in kanaal 5), dan stelt het een der cijfers 0 t/m 9 voor; deze worden dus verkregen door het getal met 16 te verminderen: een meetresultaat *V* moet dus uit de desbetreffende vier karakters k_1 t/m k_4 berekend worden volgens:
   $V = 10\ [10\{10(k_1 - 16) + k_2 - 16\} + k_3 - 16] + k_4 - 16.$
4) Ligt het getal tussen 26 en 31 (hogere getallen kan men in 5-kanaalsband niet binair ponsen), dan wordt de meetserie weer afgekeurd.

Door de meetresultaten per (decimaal) cijfer te ponsen, bespaart men zich het binair coderen van grote getallen, maar men heeft uiteraard wat meer binaire cijfers (bits) nodig; het volledig binair coderen van de toegevoerde meetresultaten geschiedt in de machine. Voor het behandelen van een serie van 60 metingen plus „kop" volgens het gehele beschreven proces (te weten dus het lezen, controleren, decoderen van de bandponsing en systematisch opbergen) heeft de machine $\frac{1}{4}$ seconde

[13]) De meeste van deze programma's zijn gemaakt door de staf van Philips' Rekencentrum. In het bijzonder heeft H. Q. J. Meershoek alle programma's gemaakt waarin de baanvergelijkingen numeriek worden opgelost.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

nodig. Deze tijd wordt bepaald door de snelheid waarmee de band het leesstation passeert; de voor de berekening vereiste tijd is ongeveer de helft hiervan. Voor het verkrijgen van die metingen zelf zijn, zoals vermeld werd, 60×5 seconden ofwel 5 minuten nodig.

De programma's P1, P2 en P4

Zoals vermeld werd, moet de kromme door de 22 meetpunten die men verkrijgt bij een ijkmeting, worden voorgesteld door een polynoom van de zevende graad:

$$B = \sum_{n=0}^{7} c_n x^n . \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Hierin is x dus een bepaalde aflezing van de digitale voltmeter en B de daarmee corresponderende inductie. Bij de ijking wordt B in de band geponst in de vorm van de frequentie van de protonresonantie en x in de vorm van drie aflezingen van de voltmeter, d.w.z. ieder ijkpunt wordt verkregen uit drie metingen. De acht coëfficiënten c_n worden met behulp van het programma *P1* berekend volgens de methode der kleinste kwadraten [14]).

De programma's *P2* en *P4*, die respectievelijk de resultaten van de metingen *M2* en *M3* verwerken, hebben allebei, volgend op het ingangscontroleprogramma, een deel waarin de meetresultaten via verg. (9) worden omgerekend in B-waarden.

De rest van het programma *P2* onderwerpt alle azimutale meetseries — deze strekken zich dus uit over één sector van 120° — aan een fourier-analyse. Daar de sectoren identiek verondersteld worden, komen alleen die coëfficiënten voor waarvan het rangnummer een veelvoud van drie is. Deze berekeningen leveren dus in de eerste plaats de grootheden $\overline{B}$, a_{3m} en b_{3m} die voorkomen in de formule

$$B(\Theta) = \overline{B} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{3m} \cos 3m\Theta + b_{3m} \sin 3m\Theta . \quad (10)$$

Deze formule is, naar men ziet, niets anders dan een voor ons doel meer geschikte vorm van formule (6).

De machine zet de fourier-analyse voort tot de waarde M van m waarvoor a en b van de orde van grootte van de ruis zijn geworden. (De waarde van a en b neemt snel af met toenemende m.)

Vervolgens laat *P2* de machine controleren of er waarden zijn die meer dan 2×10^{-3} Wb/m² afwijken van de waarde die volgt uit het rechterlid van (10) als men daarin de M berekende paren van fourier-coëfficiënten substitueert (fouriersynthese). Worden er dergelijke meetwaarden gevonden, dan vervangt de machine die door een waarde die door interpolatie gevonden wordt. Is na drie van dergelijke correcties de maximum afwijking nog te groot, dan wordt de meetserie verworpen. De ponsband *T5* die de machine na de berekeningen *P2* aflevert, bevat $\overline{B}$ en de coëfficiënten a_{3m} en b_{3m} voor $m = 1$ t/m 6 — de hogere harmonischen mogen in de verdere berekeningen verwaarloosd worden. Op het papier dat de machine tegelijk met *T5* aflevert, wordt bovendien, als indicatie van de meetruis, de maximumwaarde van het verschil tussen de gemeten waarden en de fouriersynthese uitgetikt.

Het programma *P4* verwerkt de metingen aan de tien paren hulpspoelen. Gemeten zijn het hoofdveld en achtereenvolgens de velden die verkregen worden als bovendien één paar hulpspoelen stroom voert. Voor ieder geval zijn er tien radiale reeksen gemeten die met elkaar een sector van 120° bestrijken. Fluctuaties van meer dan 2×10^{-3} Wb/m² worden weer gedetecteerd en het desbetreffende meetpunt wordt gecorrigeerd door radiale interpolatie. Voor ieder spoelenpaar worden $\Delta\overline{B}(r)$-waarden op band geponst (*T9*). De kop van deze band bevat o.a. het identificatienummer van het hoofdveld en dat van het paar hulpspoelen.

De programma's P3, P5 en P6

Door middel van het programma *P3* worden alle met behulp van *P2* verkregen resultaten die betrekking hebben op één bepaald veld — d.w.z. die hetzelfde veldnummer dragen — gecombineerd tot tabellen van $\overline{B}(r)$, $a(r)$ en $b(r)$. Verder worden deze getallenreeksen „gladgestreken" en worden eventueel ontbrekende getallen ingevuld door middel van interpolatie.

Vervolgens worden, uitgaande van de reeds genoemde benaderde analytische oplossing van de bewegingsvergelijkingen, berekend:

1) de frequenties van de horizontale en verticale oscillaties die een ion rondom een evenwichtsbaan uitvoert, en wel met weglating van de bijdrage van de relativistische massaverandering.
2) Het voor de isochronie vereiste verloop van $\overline{B}$ (idem).
3) Twee parameters die de horizontale stabiliteit karakteriseren [15]).

Als deze berekeningen zijn uitgevoerd, ponst de machine twee banden. Op de ene (*T6*) staan de 13 tabellen die $\overline{B}(r)$, $a_{3m}(r)$ en $b_{3m}(r)$ geven voor de r-waarden 0, 2, 4, . . . ,70 cm. (Eén tabel van $\overline{B}(r)$ en zes voor ieder der soorten fourier-coëfficiënten.)

[14]) Men vindt deze methode zowel beschreven in de hoofdstukken over regressie-analyse van boeken over statistische methodes (b.v. P. G. Hoel, Introduction to mathematical statistics, Wiley, New York 1954, of M. J. Moroney, Facts from figures, Penguin books 1951) als in boeken over fysische meettechniek (b.v. F. Kohlrausch, Praktische Physik, 20e druk, dl. I, hfdst. 1.22, Teubner, Stuttgart 1955).

[15]) De parameters D_1 en D_2 die voorkomen in het aangehaalde artikel [10]).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

De andere band (*T7*) bevat alleen $\bar{B}(r)$. De band *T6* kan dienst doen in programma's waarin de baanvergelijkingen worden geïntegreerd, de band *T7* doet dienst in het programma *P6* ter berekening van de stromen die in de hulpspoelen moeten vloeien om het gemiddelde veld zodanig te veranderen dat het aan de eis van isochronie voldoet.

Het programma *P5* bevat delen waarin de baanvergelijkingen numeriek worden geïntegreerd en verwerkt derhalve de band *T6*. Door middel van een iteratieproces, dat we verder niet zullen beschrijven, worden de evenwichtsbanen berekend met straal van 4 tot 54 cm, opklimmend met 2 cm. (We stellen een dergelijke reeks voortaan voor door $r = 4(2)54$ cm.)

Vervolgens berekent *P5* het voor isochronie vereiste verloop $\bar{B}_{is}$ van $\bar{B}(r)$ en wel eveneens volgens een iteratieprocédé. Begonnen wordt met voor ieder der zojuist berekende evenwichtsbanen de omloopfrequentie ω te berekenen. Evenals bij *P3* geschiedt dit weer met weglating van de bijdrage van de relativistische massaverandering; deze wordt later voor iedere ionensoort (iedere e/m-waarde) afzonderlijk toegevoegd. Daar ω ongeveer evenredig varieert met $\bar{B}$, kunnen de correcties ΔB die moeten worden aangebracht om isochronie te bereiken, met goede benadering worden afgeleid uit de verschillen $\Delta\omega$. Daar dit proces snel convergeert, behoeft men het slechts enkele malen te herhalen om een zeer goede benadering te verkrijgen.

Ten slotte zijn, door integratie van de baanvergelijkingen, f_r en f_z berekend, eveneens weer voor niet-relativistische deeltjes.

Uitgaande van de resultaten van de bovenstaande berekeningen, hebben we voor ionen met verschillende e/m-waarde een schatting gemaakt van het verloop dat $\bar{B}_{is}(r)$ heeft als men wèl rekening houdt met de relativistische massaverandering. Uitgaande van deze schatting als eerste benadering, is met behulp van het zojuist geschetste iteratieproces $\bar{B}_{is}(r)$ berekend voor protonen, deuteronen, α-deeltjes, $^3He^{++}$-ionen en $^4He^{+}$-ionen. Deze hebben, als men die van het proton één stelt, resp. de e/m-waarden: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{4}$.

Door middel van het programma *P6* wordt berekend, welke stromen I_j men door de hulpspoelen moet laten vloeien om in een bepaald geval (dit betreft dus ionensoort en de gewenste eindenergie) zo goed mogelijk het vereiste veld te realiseren. Voor de berekening wordt uitgegaan van $\bar{B}(r)$ voor de hoofdspoel (meting *M2*, geponst in band *T7*) het met *P5* berekende isochrone (gemiddelde) veld $\bar{B}_{is}(r)$ (band *T8*), de bekende invloed van ieder der paren hulpspoelen op het verloop van het gemiddelde veld (band *T9*), en tenslotte van een groep parameters, geponst in band *T10*, die op een aanstonds te beschrijven wijze definiëren wat er verstaan wordt onder „zo goed mogelijk".

In woorden uitgedrukt, verstaan we onder „zo goed mogelijk":

1) Het fazeverschil tussen de Dee-spanning en het rondgaan van de ionen moet zo klein mogelijk zijn.
2) Ter vermijding van verticale instabiliteit moet de waarde van de veldindex beneden een zekere grens blijven. (Daar het ideale veldverloop benaderd wordt met een eindig aantal hulpspoelen, slingert $\bar{B}(r)$ om het theoretisch vereiste verloop. Er moet voor gewaakt worden dat de corresponderende slingeringen in k niet te groot zijn.)
3) Ten einde de bundel bij verschillende excitaties van de magneet te kunnen extraheren, moet het randveld een bepaald verloop hebben; geëist wordt dat het werkelijke verloop hiervan zo weinig mogelijk afwijkt.

Het berekenen van de stromen met inachtneming van deze drie voorwaarden en van de neveneis dat deze stromen aan een bovengrens gebonden zijn, is weer geschied volgens de methode der kleinste kwadraten. Hierbij is aan de drie eisen afzonderlijk een gewicht toegekend. De zojuist genoemde groep van parameters bevat o.a. deze gewichten, de hoogste waarde van r waarvoor nog aan de eisen 1) en 2) voldaan moet zijn, de ondergrens van r ten aanzien van de derde eis — de gebieden moeten elkaar een eindje overlappen — en de maximaal toelaatbare waarde van de stromen.

Het programma P7

Het blok *P7* in fig. 10 dat de inscriptie „algemeen onderzoek" draagt, representeert een groep van programma's die alle bestaan uit een deel dat de baanvergelijkingen numeriek oplost — evenals bij *P5* moet derhalve de band *T6* toegevoerd worden — en een specifiek deel dat het verdere rekenproces „organiseert". In sommige gevallen kan ook een veldverstoring toegevoegd worden, b.v. een eerste harmonische $c_1(r)\cos\Theta$.

Het programma *P7a* („omloopfrequentie enz.") lijkt op *P5* maar is eenvoudiger. Het berekent voor de gemeten veldvorm voor ieder soort deeltje de evenwichtsbanen met $\bar{r} = 4\,(2)\,54$ cm en voor ieder van deze banen de impuls, de energie, de oscillatiefrequenties en de omloopfrequentie.

Het programma *P7b* („exploratie") onderzoekt het gedrag van ionen die in het horizontale vlak oscilleren met een grote amplitude. Hiertoe wordt

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

ieder ion gedurende 10 omwentelingen op zijn baan gevolgd. De bewegingstoestand wordt gekarakteriseerd door de straal r en de helling $dr/d\Theta$ die de baan in zeker punt heeft ten opzichte van de cirkel die door dat punt gaat; deze helling wordt aangeduid met r' en uitgedrukt in cm/rad. Om de vrije oscillaties te kunnen onderscheiden van de gedwongen oscillaties die een ion uitvoert ten gevolge van de azimutale variatie van het veld, worden de ionen „stroboscopisch" bekeken, d.w.z. we beschouwen r en r' slechts voor $\Theta = 0°$, 120° en 240°. Op deze wijze wordt de gedwongen oscillatie geëlimineerd. Door de machine de berekening te laten uitvoeren voor een flink aantal beginwaarden, krijgt men snel een indruk van de radiale beweging van het ion. De berekende waarden van r en r' kunnen door middel van een „data plotter" automatisch in een grafiek getekend worden. Een voorbeeld van zo'n radiaal fazevlakdiagram vindt men in *fig. 10*. De kruisjes in deze figuur stellen invariante punten voor, d.w.z. ze gelden voor banen waarvoor r en r' na iedere omwenteling weer dezelfde waarde hebben.

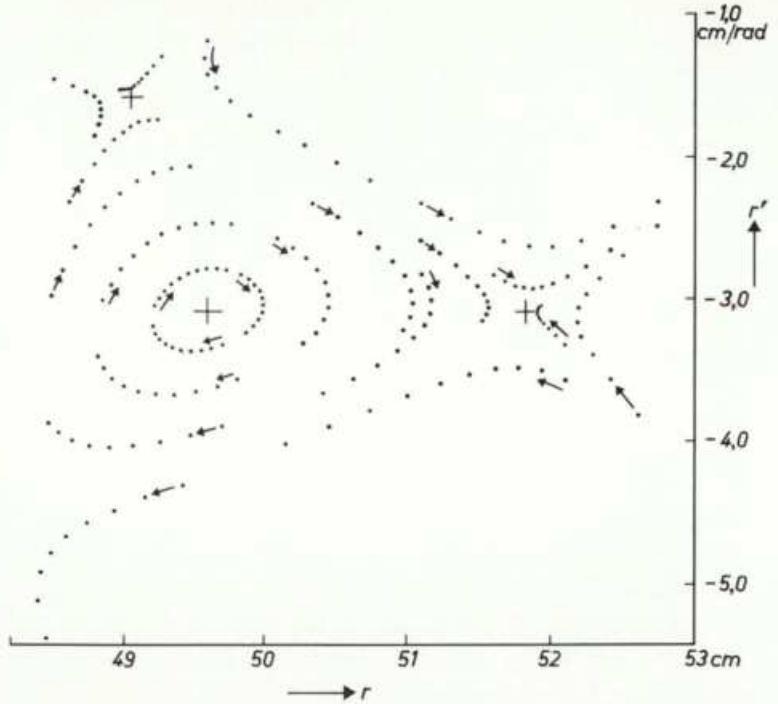


Fig. 10. Met het tot *P7* behorende programma „exploratie" (*P7b*) volgt men het radiale gedrag over tien omwentelingen van ionen die vertrokken zijn uit een punt buiten de evenwichtsbaan en onder een zekere hoek met deze baan (maar wèl in het symmetrievlak). De toestand op een bepaald azimut wordt in het fazevlakdiagram gekarakteriseerd door de straal r en de afgeleide $dr/d\Theta$, die wordt voorgesteld door r'. Men ziet steeds groepen van 10 punten die corresponderen met de successieve passages van één ion. De kruisjes representeren banen van ionen die na iedere omwenteling weer dezelfde r- en r'-waarde hebben. Onder deze zg. „periodieke banen" vindt men zowel stabiele (o.a. de evenwichtsbaan; d.i. het kruisje bij $r = 49{,}6$ cm) als instabiele. De gemiddelde straal van de evenwichtsbaan was hier 48 cm. Daar de evenwichtsbaan niet cirkelvormig is, is ook voor deze baan in het algemeen $r' \neq 0$.

De r- en r'-waarden van deze zg. „periodieke banen" kunnen door iteratie worden gevonden met het programma *P7c* mits men uitgaat van een r,r'-combinatie die dicht genoeg bij één der gezochte invariante punten ligt. Onder de periodieke banen die men theoretisch vinden kan — er zijn er ten minste zeven, waaronder uiteraard de evenwichtsbaan —, bevinden zich zowel stabiele als instabiele banen. De stabiliteit van de evenwichtsbaan is des te groter, naar mate in het r,r'-diagram de „kruisjes" van de drie naburige instabiele (meta-stabiele) banen verder weg liggen.

Door het proces steeds te herhalen voor een iets grotere (kleinere) waarde van de impuls, kan men nagaan hoe de invariante punten die stabiele periodieke banen representeren, zich als functie van de impuls verplaatsen in het fazevlakdiagram.

Ten slotte bevat de groep *P7* een subgroep *P7d* van tamelijk gecompliceerde programma's („deflectie") die informatie geven omtrent de mogelijkheid van bundelextractie (zowel magnetisch als elektrostatisch).

Enkele van de toegepaste rekenmethodes

De fourier-analyse (P2)

Stel dat men een functie $B(\Phi)$ gemeten heeft in N punten Φ_i die gelijkmatig zijn verdeeld over een cirkelomtrek — de hoek $\Phi_i = (i-1)2\pi/N$, $(i = 1, \ldots, N)$ — en dat men de coëfficiënten wil berekenen van de reeks:

$$B(\Phi_i) = \bar{B} + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos k\Phi_i + b_k \sin k\Phi_i . \quad (11)$$

De functies $\cos k\Phi$ en $\sin k\Phi$ waarin $B(\Phi)$ aldus ontwikkeld is, zijn orthogonaal in dien zin dat de som over i van het produkt van twee ervan gelijk nul is, d.w.z.

$$\sum_{i=1}^{N} \sin k\Phi_i \sin l\Phi_i = 0$$

als $k \neq l$ is. Verder geldt:

$$\sum_{i=1}^{N} \sin^2 k\Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \cos^2 k\Phi_i = N/2 .$$

Met behulp van deze gegevens vindt men als oplossing:

$$\bar{B} = \frac{1}{N} \Sigma\ B(\Phi_i) ,$$

$$a_k = \frac{2}{N} \Sigma\ B(\Phi_i) \cos k\Phi_i ,$$

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

en $$b_k = \frac{2}{N} \sum B(\Phi_i) \sin k\Phi_i \,.$$

Dank zij de genoemde orthogonaliteit voldoet nu elke kortere reeks

$$B^*_M(\Phi_i) = \overline{B} + \sum_{k=1}^{M} a_k \cos k\Phi_i + b_k \sin k\Phi_i \,, \quad (12)$$

waarin dus $M < N/2$ is, aan de voorwaarde die de methode der kleinste kwadraten stelt:

$$\sum_i (B - B^*_{M,i})^2 = \text{minimum} \,. \quad . \quad . \quad (13)$$

Hierin is $B_{M,i}$ een verkorte schrijfwijze voor $B_M(\Phi_i)$. (Door de orthogonaliteit nl. behoeft men voor het verkrijgen van een betere benadering de reeks slechts langer te maken; het toevoegen van extra termen vereist hier niet dat de voorgaande termen veranderd worden.) De grootheid $B - B^*_{M,i}$, die correspondeert met de weggelaten hogere termen van de reeks, noemen we de rest $d_{M,i}$:

$$d_{M,i} = \sum_{k=M+1}^{N/2} a_k \cos k\Phi_i + b_k \sin k\Phi_i \,. \quad (14)$$

De waarde van $d_{M,i}$ kan worden gevonden door het gemeten verloop van B te verminderen met het rechterlid van (12).

Gedurende de berekening van de fouriercoëfficiënten houdt de machine steeds de waarde van $d_{M,i}$ bij. De eerste waarde $d_{0,i}$ die geldt zolang er nog geen enkele coëfficiënt berekend is, is $B - \overline{B}$ en wordt berekend zodra $\overline{B}$ gevonden is. Na het berekenen van ieder volgend coëfficiëntenpaar wordt de $d_{M,i}$-waarde vervangen door een nieuwe die één fourierterm kleiner is:

$$d_{M,i} = d_{(M-1),i} - a_M \cos M\Phi_i - b_M \sin M\Phi_i \,.$$

Na iedere stap wordt een autocorrelatiecoëfficiënt C_F van de rest d_i (we laten de index M verder weg) berekend volgens de formule:

$$C_F = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} d_i d_{i+1} + d_N d_1}{\sum_{i=1}^{N} d_i^2} \,.$$

Bevat de rest nog periodieke variaties die groter zijn dan de toevallige fluctuaties (ruis) en waarvan de fouriercoëfficiënt een index k heeft die kleiner is dan $N/6$, dan is, naar men kan aantonen, C_F positief. Bestaat de rest in hoofdzaak uit ruis, dan is C_F negatief. De machine zet de fourier-analyse voort totdat C_F negatief geworden is. Op deze wijze worden er niet méér fouriercoëfficiënten berekend dan zinvol is.

Het op tijd beëindigen van de fourier-analyse is niet zozeer belangrijk uit een oogpunt van tijdwinst — die is niet zo groot —, maar omdat we op deze wijze de gemeten reeks $B(\Phi_i)$ zo goed mogelijk scheiden in een essentieel deel B^* en de meetruis d (vgl. de bespreking van *P2* hierboven).

De berekening van de calibratiecoëfficiënten (P1)

Er zijn 22 meetpunten $B_i = B(x_i)$; de grootheden x_i zijn de aflezingen van de digitale voltmeter. De methode der kleinste kwadraten eist hier dat we de coëfficiënten van de benadering:

$$B^*_i = \sum_{n=0}^{M} c_n x^n \,,$$

zodanig bepalen dat voor B^*_i een met (11) analoge formule geldt.

We passen weer hetzelfde principe toe als dat waarop de berekening van de fouriercoëfficiënten berust. In de eerste plaats maken we van x_i^n een groep orthogonale functies in $X_{n,i}$ volgens het procédé dat gebruikt wordt voor het construeren van polynomen van Legendre:

$$X_n = x^n - \sum_{l=0}^{n-1} a_{n,l}\, x^l \,,$$

waarin de coëfficiënten $a_{n,l}$ zo gekozen zijn dat

$$\sum_i X_{n,i} X_{l,i} = 0 \text{ als } n \neq 1 \text{ is} \,.$$

Ook hier is dan weer een kortere reeks voor $B(x_i)$ in de functies $X_{n,i}$ een kleinste-kwadraten-benadering. Door de rest te onderzoeken, hebben we gevonden dat deze kleiner dan 10^{-4} Wb/m² is als men $M \geqq 7$ kiest. Dit is dus de basis van de bewering dat de ijkkromme moet worden voorgesteld door een polynoom van de 7de graad.

Het „gladstrijken" van de fouriercoëfficiënten (P3)

De tabellen voor $\overline{B}(r)$, $a_{3m}(r)$ en $b_{3m}(r)$ die volgen uit metingen van B in de equidistante punten $r_i = 0(2)64$ cm, worden op de volgende wijze gladgestreken.

Een functie $y_i = y(x_i)$ zij gegeven in de equidistante punten x_i. We bepalen een gladde functie $\overline{y}_i$ met behulp van de vergelijking:

$$\sum_i [\delta^4(\overline{y}_i)]^2 + K(\overline{y}_i - y_i)^2 = \text{minimum}, \quad . \quad (15)$$

waarin δ^4 de differentie van de vierde orde is:

$$\delta^4(y_i) = y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2} \,,$$

en K een parameter. Door middel van de conditie (15) eisen we tegelijkertijd dat de functie $\overline{y}_i$ glad is — in dien zin dat de differenties van de vierde orde klein zijn —, en dat de afwijkingen $d_i = \overline{y}_i - y_i$ klein zijn.

De functie wordt des te sterker gladgestreken naarmate men K kleiner kiest. Uiteraard mag K

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

niet zo klein zijn dat de functie y_i verminkt wordt en er informatie verloren gaat. De meest geschikte waarde voor K wordt tijdens de berekening gevonden door $\bar{y}$ successievelijk te berekenen voor $K = 100, 30, 10, 3$, enz. Na iedere berekening wordt de autocorrelatiecoëfficiënt C_S van de afwijking d berekend volgens:

$$C_S = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} d_i d_{i+1}}{\frac{1}{2}d_1^2 + \frac{1}{2}d_N^2 + \sum_{i=2}^{N-1} d_i^2}.$$

Het verschil tussen de definitie van C_S en van de autocorrelatiecoëfficiënt C_F die bij de fourier-analyse gebruikt wordt, wordt veroorzaakt door het feit dat we bij de fourier-analyse te maken hebben met een cyclische reeks van waarden, een reeks dus waarin ook de correlatie tussen het laatste en het eerste punt een rol speelt.

Voor grote K is C_S negatief; er is dan geen correlatie tussen de afwijkingen d_i en d_{i+1}, wat erop wijst dat deze uitsluitend uit ruis bestaan. Is K zo klein dat er informatie wordt „weggeschaafd", dan bestaat er tussen de aangebrachte correcties uiteraard wel een correlatie en is C_S positief. De berekening wordt derhalve beëindigd bij de K-waarde waarvoor C_S juist positief wordt.

De verwerking van de metingen aan de hulpspoelen (P4)

We hebben metingen $B(r_i, \Theta_j)$ bij $r_i = 0(2)64$ cm en $\Theta_j = 0(12^\circ)108^\circ$ voor het hoofdveld èn voor het veld dat men krijgt als bovendien één paar hulpspoelen bekrachtigd wordt. We verkrijgen de bijdrage $\Delta B(r_i, \Theta_j)$ van de hulpspoelen door de beide in één punt gemeten waarden van elkaar af te trekken.

Uit formule (10) voor de vorm van het magneetveld kan men afleiden dat:

$$\tfrac{1}{10} \sum_{j=0}^{9} \Delta B(r_i, \Theta_j) = \Delta \bar{B}(r_i) + \Delta a_{30}(r_i).$$

In woorden: de gemiddelde waarde van het verschil ΔB gemeten in tien equidistante punten op een cirkelboog van 120°, is gelijk aan het verschil van de gemiddelde waarden van B plus het verschil van de amplitudes van de 30e harmonische ($\cos 30\Theta$ is in alle meetpunten $+1$; de andere fouriertermen vallen weg). Daar a_{30} slechts enkele malen 10^{-4} Wb/m² bedraagt, is Δa_{30} te verwaarlozen en mag men stellen:

$$\Delta \bar{B}(r_i) = \tfrac{1}{10} \sum_{j=0}^{9} \Delta B(r_i, \Theta_j).$$

De metingen worden gecontroleerd door middel van een betrekking die eveneens uit (10) volgt voor de som $D(r_i)$ van de alternerende reeks $+\Delta B(r_i, \Theta_0)$, $-\Delta B(r_i, \Theta_1)$ enz. Deze luidt:

$$D(r_i) = \sum_{j=0}^{9} (-1)^j \Delta B(r_i, \Theta_j) = 10\, \Delta a_{15}(r_i).$$

Nu is a_{15} kleiner dan 5×10^{-3} Wb/m² en Δa_{15} kleiner dan 10^{-4} Wb/m². $D(r_i)$ is dus, als 't goed is, ten hoogste ca. 10^{-3} Wb/m². De machine berekent steeds de waarde van $|D|$ en controleert of deze kleiner is dan 2×10^{-3} Wb/m². Zo niet, dan wordt voor iedere serie in radiale richting de vierde differentie δ^4 berekend en wordt de serie waarin de grootste δ^4-waarde voorkomt gecorrigeerd door radiale interpolatie. Is $|D|$ daarna nog te groot, dan wordt de meetserie verworpen.

Resumerend kan omtrent het geheel der beschreven programma's gezegd worden dat deze ons in staat gesteld hebben: een zeer groot aantal metingen te verwerken zonder dat ongeloofwaardige resultaten onopgemerkt bleven; de toevallige fluctuaties in de metingen van alle series te vinden, d.w.z. te controleren of de vereiste precisie inderdaad bereikt werd en behouden bleef; de stromen in de hulpspoelen te berekenen die vereist zijn om ionen van de gekozen soort de gewenste eindenergie te doen bereiken; een indruk te krijgen van de stabiliteit van de banen en, ten slotte, het gedrag van de ionen zodanig te leren kennen dat verdere ontwikkeling van dit type cyclotron — b.v. ten aanzien van de bundelextractie — mogelijk is.

Samenvatting. In Philips' Natuurkundig Laboratorium is een isochroon cyclotron in aanbouw waarmee verschillende soorten ionen kunnen worden versneld tot een variabele maximumenergie (protonen tot max. 25 MeV). In een isochroon cyclotron wordt de invloed van de relativistische massaverandering op de omloopfrequentie gecompenseerd door de inductie $\bar{B}(r)$ van het magneetveld te laten toenemen met de straal r. De verticale stabiliteit van de banen wordt verkregen door B langs een cirkel periodiek te doen variëren met behulp van sectorvormige heuvels en dalen op de poolschoenen. Het Philips-cyclotron is bovendien uitgerust met tien paren hulpspoelen, waarmee het verloop van $\bar{B}(r)$ zo kan worden gecorrigeerd als voor de gewenste ionensoort en maximumenergie vereist wordt. Beschreven wordt hoe dit gecompliceerde veld gemeten is — bij 10 bekrachtigingen van de hoofdspoel, in verband met de gewenste variatie van de eindenergie — en hoe de ruim 10^5 meetpunten zijn verwerkt met een rekenmachine. De berekeningen omvatten 1) het construeren van de ijkkromme van de veldmeetapparatuur, 2) fourier-analyse van het veldverloop langs cirkels, 3) het gladstrijken van de tabellen van $\bar{B}(r)$ en de fouriercoëfficiënten, 4) het berekenen van de invloed der hulpspoelen, 5) het vinden van het voor isochronie vereiste verloop van $\bar{B}$ met r, 6) het berekenen van de stroom door de hulpspoelen waarmee dit veldverloop zo goed mogelijk benaderd wordt, en ten slotte diverse controleberekeningen o.a. ter opsporing van ongeloofwaardige meetresultaten.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

DE SNIJVERLIEZEN BIJ DE FABRICAGE VAN GOLFKARTON

door H. W. van den MEERENDONK *) en J. H. SCHOUTEN **).

65.012.122:676.76

De zeer grote hoeveelheden verpakkingsmateriaal die de Philipsfabrieken nodig hebben voor het verzenden van hun produkten, worden grotendeels geleverd door een eigen golfkartonfabriek, die op haar beurt de belangrijkste grondstof voor het golfkarton — papier — betrekt van een eigen papierfabriek. *Fig. 1*) moge een indruk geven van de omvang van dit bedrijf.

*) Afd. Technische Efficiency en Organisatie, Philips Eindhoven.
**) Philips' Rekencentrum, Eindhoven. In november 1961 is Drs. Schouten onverwacht overleden.

In de golfkartonfabriek zijn twee grote machines opgesteld. De ene produceert een baan golfkarton ter breedte van ca. 2170 mm, de andere een baan van ca. 1525 mm. Elk der beide machines bezit, behalve de sectie die de continu doorlopende baan karton aflevert, (zie *fig. 2* en *3*), een tweede sectie, waarin de baan golfkarton versneden wordt tot rechthoekige platen. Dit gebeurt door twee soorten snij-inrichtingen. De eerste soort brengt door middel van een roterend cirkelvormig mes een doorlopende snede in de lengterichting van de baan golfkarton aan; de tweede soort snij-inrichting be-

Fig. 1. Het rollenmagazijn van Philips' Golfkartonfabriek te Eindhoven. Per jaar stromen door dit magazijn 36 000 ton papier, die tot golfkarton worden verwerkt.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

staat uit een stel „afslagmessen", die een snede in de dwarsrichting van het golfkarton kunnen aanbrengen (zie *fig. 4*). Van de eerste soort snij-inrichting kan er bij elk der beide golfkartonmachines een groot aantal in werking worden gesteld, zodat men evenzovele smalle banen, ieder met instelbare breedte, kan produceren. Van de tweede soort snij-inrichting zijn er bij elke golfkartonmachine slechts twee aanwezig. Deze zijn boven elkaar geplaatst aan het eind van de baan en kunnen ieder op een gewenste afslaglengte worden ingesteld. Van de door overlangse sneden reeds in stroken verdeelde baan golfkarton worden vervolgens een of meer stroken naar de bovenste, de overige naar de onderste afslaginrichting gevoerd.

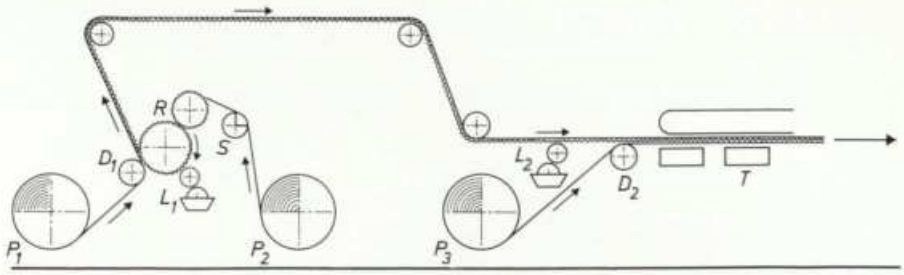


Fig. 2. Schema van de fabricage van golfkarton. Van de rollen P_1, P_2 en P_3 lopen drie banen papier af waaruit het golfkarton wordt vervaardigd. Op de rol S wordt de middelste papierbaan (het „binnenblad") door stoom bevochtigd en verhit. Daarna wordt deze baan door de verwarmde „riffelwalsen" R geleid, die de gewenste golf in het papier drukken. Direct aansluitend wordt dit binnenblad aan één zijde op de golftoppen met lijm besmeerd (lijmbak en smeerwals L_1) en het voor deze zijde bestemde buitenblad door een drukwals D_1 ertegen gedrukt. Verderop wordt het binnenblad aan de andere zijde met lijm besmeerd (lijmbak en smeerwals L_2) en het andere buitenblad hiertegen gedrukt. D_2 is een leirol. Er volgt ten slotte een verhitting door de stoomplaten T voor het verstijfselen van de lijm en het drogen van het golfkarton. De baan van het gerede golfkarton wordt geheel rechts aan de snij-inrichtingen toegevoerd voor het versnijden tot platen van de gewenste afmetingen (zie fig. 4).

Voor „dubbeldik" golfkarton gaat men uit van vijf rollen papier; het tweede en het vierde blad worden dan gegolfd.

De gesneden platen golfkarton gaan in vele gevallen nog naar een nabewerkingsafdeling, waar ze b.v. worden bedrukt en waar er dozen van worden gemaakt.

Fig. 3. Golfkartonmachine, die een baan dubbeldik golfkarton ter breedte van 2170 mm produceert. Het fabricageproces begint links op de foto. De grondstof — vijf banen papier — wordt vanaf grote rollen aan de machine toegevoerd. Bij elke rol papier staan nog twee andere rollen gereed om een lege rol onmiddellijk te kunnen vervangen, zodat de aflopende baan golfkarton niet onderbroken wordt. De eerste reserverol voor de meest linkse rol (P_1 van fig. 2) ziet men rechts ervan in de machine, de tweede reserve ligt daarnaast op de voorgrond, buiten de machine. Bij de volgende werkrollen liggen beide reserves reeds in de machine. Boven de man aan het bedieningskastje in het midden van de foto ziet men een grote ventilatorkap. Op de meter ter hoogte van het rechter einde van de kap kan de snelheid van de aflopende baan golfkarton worden afgelezen.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

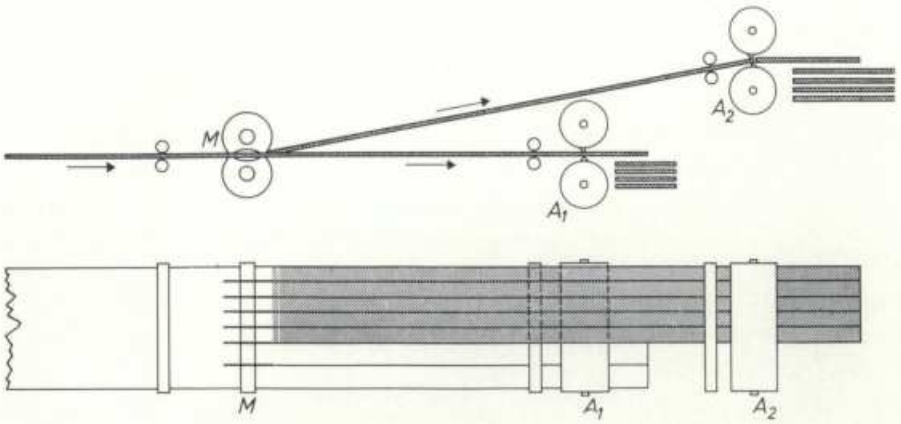


Fig. 4. Schema van de twee soorten snij-inrichtingen. De van links komende baan golfkarton wordt door een aantal roterende messen M, waarvan men de afstanden kan instellen, overlangs in een aantal stroken van de gewenste breedten gesneden. Een deel van de stroken gaat rechtdoor naar een „afslagmes" A_1 voor het aanbrengen van dwarse sneden, het andere deel wordt omhoog geleid (in de plattegrond geschaduwd aangegeven) en gaat naar een ander afslagmes A_2. Deze afslagmessen worden door een soort excentriek op en neer bewogen, met zodanig in te stellen snelheid dat zij platen met de gewenste lengten afsnijden. Het bewegingsmechanisme is zo uitgevoerd dat de messen tijdens het eigenlijke snijden precies met de juiste snelheid met de lopende baan golfkarton meebewegen, zodat deze baan niet gestuikt en ook niet gescheurd wordt.

Hoe verloopt nu de fabricage? Iedere week moet de golfkartonfabriek een reeks orders afwerken, die zij van de diverse Philipsfabrieken (en van derden) heeft ontvangen. Gezien de grote verscheidenheid van te verpakken produkten, zal het duidelijk zijn dat de orders zeer sterk zullen verschillen wat de afmetingen der gevraagde platen betreft. Het probleem dat zich elke week opnieuw voordoet, is, op welke wijze de twee geproduceerde banen golfkarton tot platen van de bestelde afmetingen moeten worden versneden. Immers, in het algemeen zal de breedte der platen van een order niet een geheel aantal malen in de vaste breedte van de kartonbaan passen, zodat er een strook van zekere breedte afvalt. Men kan trachten, door platen van verschillende orders naast elkaar in de baan te leggen, de beschikbare breedte vollediger te benutten (*fig. 5*), maar men moet er dan op letten of soms bij de combinatie van de resterende orders niet juist een bredere strook verloren zal gaan. Het doel moet dus zijn, de combinatie van orders zo te plannen dat de totale snijverliezen van de weekproduktie zo klein mogelijk worden.

De orders kunnen ook in de gewenste „kwaliteit", b.v. papiersoorten en diepte van de golf, uiteenlopen. Het probleem wordt daardoor niet essentieel beïnvloed, het moet alleen voor elke groep orders van een zelfde kwaliteit afzonderlijk worden beschouwd.

Is het aantal orders zeer klein, dan kan men zonder al te veel moeite uitrekenen, bij welke combinatie de snijverliezen een minimum worden. Bij een groter wordend aantal orders neemt het aantal mogelijke combinaties zo snel toe dat het al spoedig ondoenlijk wordt, „met de hand" de snijverliezen voor alle combinaties exact te berekenen. Men was daardoor aangewezen op de verworven ervaring en het „gevoel" van de persoon die de produktie moest plannen.

Door de komst van de elektronische rekenmachine is deze situatie veranderd. In samenwerking met het produktiebureau van de golfkartonfabriek hebben wij het probleem van de ordercombinaties nader onderzocht en voor de PASCAL geprogrammeerd. Sinds enige tijd wordt thans als proef bij het begin van elke week de gunstigste verdeling van enige groepen orders (van verschillende kwaliteit) uit het totale orderpakket met de PASCAL berekend. Hiervoor zijn slechts enkele minuten nodig. Daarnaast wordt door het produktiebureau ook voor deze groepen orders nog elke week de planning „op het gevoel" opgesteld, om door vergelijking van de resultaten en analyse van allerlei kunstgrepen die in de praktijk worden toegepast om de efficiëntie van

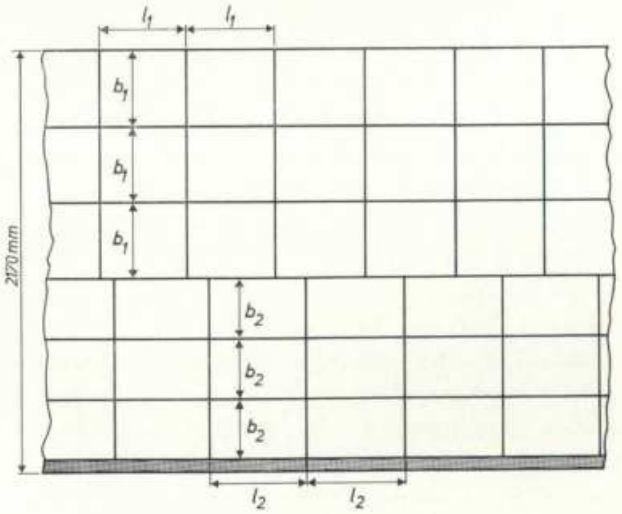


Fig. 5. De golfkartonmachine produceert een baan karton met een vaste breedte, b.v. 2170 mm. Men wenst de platen die volgens de verschillende orders in bepaalde afmetingen moeten worden geleverd, zodanig uit de baan te snijden dat een zo smal mogelijke strook van de baan (hier geschaduwd) afvalt. Hiertoe worden een aantal platen uit twee verschillende orders naast elkaar in de breedte van de baan gelegd (slechts uit twee orders, omdat de machine maar twee verschillende lengten uit de baan kan snijden).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

de fabriek te verbeteren, een verdere verfijning en aanpassing van het rekenprogramma mogelijk te maken.

De wijze waarop de berekening met de PASCAL geschiedt, vormt het onderwerp van dit artikel.

„Lineaire programmering"

Het hier beschreven golfkartonprobleem behoort tot een grote klasse van problemen die alle volgens dezelfde methode kunnen worden behandeld. Deze problemen hebben met elkaar gemeen dat een totale „opbrengst" uit verschillende bronnen maximaal moet worden gemaakt, of een totaal kostenbedrag (of verlies) van verschillende „bestedingen" minimaal, terwijl de bronnen of bestedingen niet onafhankelijk maar door een of meer nevenvoorwaarden met elkaar gekoppeld zijn. Men ziet gemakkelijk dat deze beschrijving op het golfkartonprobleem past. Op de meest uiteenlopende gebieden komt men problemen tegen van hetzelfde karakter: in de landbouwproduktie bij het verbouwen van een aantal gewassen van verschillende prijs en jaarlijkse opbrengst op een gegeven oppervlakte; in de veeteelt bij het samenstellen van een dieet, met bepaalde hoeveelheden zetmeel, eiwit en vet, uit een aantal veevoedersoorten van verschillende samenstelling en prijs; in een olieraffinaderij bij verwerking van de ruwe olie tot een aantal kraakprodukten van verschillende waarde; verder in de verdeling van scheepstransporten, in de verkeersregeling, enz. In de praktijk bestaan de boven genoemde nevenvoorwaarden zeer vaak uit lineaire betrekkingen tussen de variabelen. De taak om dan het optimale produktie- of bestedingsprogramma te bepalen, heeft men daarom als lineaire programmering aangeduid — een enigszins verwarrende benaming, aangezien deze „programmering" niets te maken heeft met het programmeren van de rekenmachine, die men gewoonlijk bij de uitvoering van de berekeningen zal inschakelen.

De methodes voor de lineaire programmering zijn pas sinds ca. 15 jaren ontwikkeld — juist in verband met het beschikbaar komen van elektronische rekenmachines —, en er zijn talrijke publikaties verschenen die de mathematische theorie ervan of praktische toepassingen behandelen [1]). Wij kunnen hier natuurlijk niet diep op de theorie ingaan, maar wij zullen trachten de gedachtengang van de methode die wij voor het golfkartonprobleem hebben toegepast, de zg. Simplex-methode, aan de hand van een getallenvoorbeeld duidelijk te maken.

[1]) Zie b.v. S. I. Gass, Linear programming, McGraw-Hill, New York 1958. W. W. Garvin, Introduction to linear programming, McGraw-Hill, New York 1960. S. Vajda, Readings in linear programming, Pitman, Londen 1958.

Een getallenvoorbeeld (Simplex-methode)

Ter vereenvoudiging nemen wij aan dat er slechts één golfkartonmachine ter beschikking staat, met een werkbreedte van 2150 mm, en voorshands zien wij nog af van de genoemde beperking tot slechts twee verschillende afslaglengten. Wij beschouwen een orderpakket van slechts drie orders, die in *tabel I* zijn vermeld.

Tabel I. Gegevens van het als voorbeeld te beschouwen pakket van drie orders.

	breedte	lengte	aantal platen
order *I*	600 mm	1000 mm	1800
order *II*	500 mm	800 mm	2400
order *III*	230 mm	300 mm	4500

De verlangde breedte der platen in deze orders is resp. 600, 500 en 230 mm. Men kan dus 3 platen van order *I* uit de werkbreedte snijden, of 4 platen van order *II*, of 9 platen van order *III*. Deze drie wijzen van versnijden („combinaties") geven wij aan met D_1, D_2, D_3; zie *tabel II*. Toepassing van deze combinaties is de primitiefste manier om de orders uit te voeren. Wij zullen dan x_1 meter van de baan golfkarton moeten versnijden volgens combinatie D_1, vervolgens x_2 meter volgens D_2, en x_3 meter volgens D_3. Daarbij moeten x_1, x_2, x_3 voldoen aan de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1800, \\ 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 &= 1920, \\ 0x_1 + 0x_2 + 9x_3 &= 1350. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

In de eerste vergelijking staat rechts de totale lengte (in m) die ontstaat als men alle bestelde platen van order *I* achter elkaar legt. Links staan de bijdragen die de volgens D_1, D_2 en D_3 versneden stukken baan daartoe leveren. In de tweede en derde vergelijking ziet men hetzelfde voor resp. order *II* en order *III*. Uit (1) volgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= 600 \text{ m}, \\ x_2 &= 480 \text{ m}, \\ x_3 &= 150 \text{ m}. \end{aligned}$$

Tabel II. De drie primitiefste wijzen („combinaties") om de baan golfkarton (breedte 2150 mm) te versnijden.

	D_1	D_2	D_3
order *I*	3	—	—
order *II*	—	4	—
order *III*	—	—	9
breedte van afvalstrook	350 mm	150 mm	80 mm

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

Tabel III. Alle mogelijke combinaties voor het gegeven orderpakket. Ter illustratie is voor elke combinatie de breedte van de afvallende strook vermeld, hoewel deze waarden in de berekening niet worden gebruikt.

	(D_1)	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	D_2	C_8	C_9	C_{10}	D_3
order *I*	(3)	3	2	2	1	1	1	1	—	—	—	—	—
order *II*	(—)	—	1	—	3	2	1	—	4	3	2	1	—
order *III*	(—)	1	1	4	—	2	4	6	—	2	5	7	9
breedte van afvalstrook in mm	(350)	120	220	30	50	90	130	170	150	190	0	40	80

In plaats van te spreken over de breedte en lengte der stroken die afvallen, kan men klaarblijkelijk volstaan met te letten op de totale gebruikte baanlengte $x_1 + x_2 + x_3$; deze zal bij de oplossing met de kleinste snijverliezen een minimum worden. Met de primitieve manier van versnijden volgens D_1, D_2, D_3 wordt $x_1 + x_2 + x_3 = \underline{1230 \text{ m}}$.

Deze manier is zeker niet de gunstigste, want men ziet direct dat in de werkbreedte naast 3 platen van order *I* nog 1 plaat van order *III* gelegd kan worden. Wij verschaffen ons nu eerst een overzicht van alle in aanmerking komende wijzen van versnijden. Dit overzicht is gegeven in *tabel III*: er zijn behalve D_2 en D_3 nog 10 combinaties C_1-C_{10} in vermeld. Het systeem, hoe men al deze combinaties vindt, is wel zonder toelichting duidelijk, en ook, dat D_1 in dit verband dadelijk vervangen kan worden door C_1.

Wij zullen nu een formeel procédé bespreken waaruit ten overvloede blijkt dat C_1 economischer is dan D_1.

Wij versnijden x_1', x_2' en x_3' meter volgens resp. D_1, D_2 en D_3, en bovendien nog p_1 meter volgens C_1. Om aan order *I* te voldoen, moet dan gelden:

$$3x_1' + 0x_2' + 0x_3' + 3p_1 = 1800,$$

en analoog voor orders *II* en *III*. De drie lineaire vergelijkingen, die een generalisatie zijn van het stelsel (1), schrijven wij symbolisch aldus:

$$x_1'\begin{Bmatrix}3\\0\\0\end{Bmatrix} + x_2'\begin{Bmatrix}0\\4\\0\end{Bmatrix} + x_3'\begin{Bmatrix}0\\0\\9\end{Bmatrix} + p_1\begin{Bmatrix}3\\0\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1800\\1920\\1350\end{Bmatrix},$$

of nog beknopter:

$$x_1'\{D_1\} + x_2'\{D_2\} + x_3'\{D_3\} + p_1\{C_1\} = \begin{Bmatrix}1800\\1920\\1350\end{Bmatrix}. \quad \ldots \quad (2)$$

De nieuw ingevoerde combinatie C_1 kan uitgedrukt worden in de oorspronkelijke combinaties D_1, D_2, D_3. Er gelden drie betrekkingen (voor elke order één), die wij op dezelfde wijze als boven kunnen schrijven:

$$\{C_1\} = a_1\{D_1\} + a_2\{D_2\} + a_3\{D_3\}. \quad \ldots \quad (3)$$

Aan de hand van tabel III verifieert men gemakkelijk dat in ons geval de coëfficiënten a_1, a_2, a_3 zijn:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \tfrac{1}{9}.$$

Substitutie van (3) in (2) met deze coëfficiënten levert:

$$(x_1' + p_1)\{D_1\} + x_2'\{D_2\} + (x_3' + \tfrac{1}{9}p_1)\{D_3\} = \begin{Bmatrix}1800\\1920\\1350\end{Bmatrix}. \quad \ldots \quad (4)$$

Daar dit, met andere variabelen, hetzelfde stelsel vergelijkingen is als (1), volgt hieruit direct:

$$\left.\begin{aligned} x_1' + p_1 &= x_1 = 600 \text{ m},\\ x_2' &= x_2 = 480 \text{ m},\\ x_3' + \tfrac{1}{9}p_1 &= x_3 = 150 \text{ m}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

In totaal hebben wij $x_1' + x_2' + x_3' + p_1$ meter versneden, en dit is blijkens (5) gelijk aan $x_1 - p_1 + x_2 + x_3 - \tfrac{1}{9}p_1 + p_1 = 1230 - \tfrac{1}{9}p_1$. De totale verbruikte baanlengte wordt dus inderdaad kleiner indien wij de combinatie C_1 mee gebruiken. Hoe ver kunnen wij hiermee gaan, d.w.z. hoe groot mag p_1 worden gemaakt? Dit wordt bepaald door de voorwaarde dat x_1', x_2', x_3' altijd $\geqq 0$ moeten zijn; immers, men kan geen negatieve baanlengten versnijden. Door opvoeren van p_1 worden, blijkens (5), de lengten x_1' en x_3' verkleind, en van deze beide wordt x_1' het eerst $= 0$, nl. bij $p_1 = 600$. De verbruikte baanlengte is dan $1230 - 600/9 = \underline{1163\tfrac{1}{3} \text{ m}}$, een winst dus van $66\tfrac{2}{3}$ m, en de nu verkregen oplossing voor het versnijden, waarin D_1 geheel vervangen is door C_1, kunnen wij schrijven als:

$$480\{D_2\} + 83\tfrac{1}{3}\{D_3\} + 600\{C_1\} = \begin{Bmatrix}1800\\1920\\1350\end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Op dezelfde wijze kunnen wij nagaan, of thans het introduceren van combinatie C_2, met een zekere baanlengte p_2, een verdere winst oplevert. Wij beschouwen daartoe de vergelijkingen:

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

$$x_1''\{C_1\} + x_2''\{D_2\} + x_3''\{D_3\} + p_2\{C_2\} = \left\{\begin{matrix}1800\\1920\\1350\end{matrix}\right\}. \quad \ldots \quad (7)$$

Ook hier kan $\{C_2\}$ worden uitgedrukt in de eerder gebruikte combinaties (heel algemeen is dit mogelijk, mits de combinaties waarvan men uitgaat, lineair onafhankelijk zijn). Men verifieert gemakkelijk, dat:

$$\{C_2\} = \tfrac{2}{3}\{C_1\} + \tfrac{1}{4}\{D_2\} + \tfrac{1}{2\,7}\{D_3\}. \quad \ldots \quad (8)$$

Substitutie in (7) geeft:

$$(x_1''+\tfrac{2}{3}p_2)\{C_1\}+(x_2''+\tfrac{1}{4}p_2)\{D_2\}+(x_3''+\tfrac{1}{2\,7}p_2)\{D_3\}= \left\{\begin{matrix}1800\\1920\\1350\end{matrix}\right\}, \quad \ldots \quad (9)$$

hetgeen nu, door vergelijking met stelsel (6), levert:

$$\left.\begin{aligned} x_1'' + \tfrac{2}{3}p_2 &= 600,\\ x_2'' + \tfrac{1}{4}p_2 &= 480,\\ x_3'' + \tfrac{1}{2\,7}p_2 &= 83\tfrac{1}{3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

De in totaal versneden baanlengte is thans:

$$x_1'' + x_2'' + x_3'' + p_2 = 600 - \tfrac{2}{3}p_2 + 480 - \tfrac{1}{4}p_2 + 83\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2\,7}p_2 + p_2 = 1163\tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{1\,0\,8}p_2.$$

Introductie van de combinatie C_2 maakt dus de oplossing slechter en heeft derhalve geen zin.

Overigens kunnen wij C_2, als wij nu de in het begin genoemde beperking bij onze golfkartonmachine in aanmerking nemen, ook daarom niet gebruiken, omdat afsnijden van parallelle stroken van de baan slechts op twee lengten mogelijk is. Wij kunnen dus alleen combinaties van twee orders nemen, zodat behalve C_2 ook nog C_5 en C_6 moeten worden geschrapt.

Laten wij in het beschreven procédé nog één stap verder gaan. Wij introduceren p_3 meters van C_3:

$$x_1'''\{C_1\} + x_2'''\{D_2\} + x_3'''\{D_3\} + p_3\{C_3\} = \left\{\begin{matrix}1800\\1920\\1350\end{matrix}\right\}, \quad \ldots \quad (11)$$

waarin voor C_3 gesubstitueerd kan worden:

$$\{C_3\} = \tfrac{2}{3}\{C_1\} + 0\{D_2\} + \tfrac{1\,0}{2\,7}\{D_3\}. \quad \ldots \quad (12)$$

Men vindt dan voor de versneden lengte:

$$x_1''' + x_2''' + x_3''' + p_3 = 1163\tfrac{1}{3} + p_3 - \tfrac{2}{3}p_3 - \tfrac{1\,0}{2\,7}p_3 = 1163\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2\,7}p_3.$$

Hier valt dus weer iets te winnen, en wel mag $p_3 = 225$ m worden gekozen, waardoor $x_3''' = 0$ wordt. De combinatie D_3 is dus nu verdrongen door C_3, de oplossing is geworden:

$$450\{C_1\} + 480\{D_2\} + 225\{C_3\} = \left\{\begin{matrix}1800\\1920\\1350\end{matrix}\right\},$$

met een totaal verbruikte lengte van $1163\tfrac{1}{3} - \tfrac{2\,2\,5}{2\,7} = \underline{1155 \text{ m}}$.

Op deze wijze voortgaande, vinden wij na proberen van alle combinaties:

$$144\{C_1\} + 289\{C_3\} + 640\{C_4\} = \left\{\begin{matrix}1800\\1920\\1350\end{matrix}\right\}, \quad (13)$$

met een te versnijden baanlengte van $\underline{\underline{1123 \text{ meter}}}$.

Er moet nu worden geprobeerd of het alsnog invoeren van een der andere, in de voorafgaande stappen geëlimineerde of afgewezen, combinaties in de laatstgevonden oplossing nog een verbetering oplevert. In het onderhavige voorbeeld blijkt dat met geen der combinaties het geval te zijn. De oplossing (13) geeft dus de optimale manier om de drie orders uit te voeren.

In het bovenstaande zijn wij op verschillende punten over vragen heengegleden die in de theorie der lineaire programmering een belangrijke plaats innemen. Met name is het niet vanzelfsprekend dat er altijd direct een „basisoplossing" aan te geven is, zoals die met D_1, D_2, D_3 die wij in ons voorbeeld zomaar hebben neergeschreven. Het is een der stellingen van de theorie, dat voor een pakket van m orders steeds zulk een basisoplossing uit maximaal m combinaties kan worden aangegeven. Ook de vraag, hoe dit verandert als men de m orders niet met één maar met twee golfkartonmachines wil uitvoeren, wordt door de theorie beantwoord: het blijkt dat men dan in het algemeen van een basisoplossing met $m+1$ combinaties moet uitgaan.

Op de theoretische fundering kunnen wij hier niet ingaan, evenmin op de grafische interpretatie die men van de geschetste algebraïsche methode kan geven. Wij verwijzen hiervoor naar de aangehaalde literatuur [1]).

Werpen wij nu nog een blik op het getallenvoorbeeld. Het rekenwerk bij elke poging één der gebruikte combinaties door een andere te vervangen — een iteratie — is eenvoudig van aard. Men ziet echter gemakkelijk in dat het rekenwerk zich alras tot enorme hoogte opstapelt als men een pakket van een groot aantal orders heeft. Immer, bij m orders heeft men telkens met systemen van m vergelijkingen met m onbekenden te maken. Ondanks de vereenvoudigingen en versnellingen die men in de gang van de berekening kan aanbrengen

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

en waarop wij straks nog willen ingaan, is het reeds bij pakketten van b.v. 20 orders ondoenlijk zonder hulp van de elektronische rekenmachine naar de exacte optimale oplossing te zoeken.

Het golfkartonprobleem in de praktijk; complicaties

Wij hebben gezien dat de eerste stap bij het berekenen van een pakket van m orders bestaat in het opzoeken van alle mogelijke combinaties, waarbij telkens twee soorten platen (d.w.z. platen met twee verschillende afsnijlengten) binnen de breedte van een golfkartonbaan vallen. Op wiskundige gronden kan men echter bij bepaalde combinaties direct besluiten dat zij géén voordeel ten opzichte van andere uit de reeks kunnen opleveren. Het is een belangrijke vereenvoudiging van het rekenwerk als wij die combinaties van te voren uit de reeks verwijderen. Er blijft dan een aantal van de orde van m^2 combinaties over.

Voorts wordt een aanzienlijke versnelling van het beschreven rekenprocédé bereikt als wij voor het uitvoeren van iteraties niet alle combinaties op het rijtje af proberen, zoals wij in het getallenvoorbeeld hebben gedaan, maar telkens de „beste" nieuwe combinatie voor een iteratie kiezen. Dit is mogelijk als wij niet alleen de „volgende" snijcombinatie van het rijtje in het stel laatstgebruikte combinaties uitdrukken, maar alle overige snijcombinaties. Wij hebben daartoe de coëfficiënten $a_1, a_2, \ldots a_m$ (zie verg. 3) voor al die snijcombinaties nodig, maar deze zijn, door een kunstgreep die uit de theorie der lineaire vergelijkingenstelsels bekend is [2]), betrekkelijk gemakkelijk te bepalen. Aan de hand van het getallenvoorbeeld (zie b.v. verg. 10) kan de lezer verifiëren dat de voorwaarde dat het invoeren van een snijcombinatie winst zal opleveren, erop neerkomt dat de som

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m > 1$$

moet zijn. De mate waarin de som de waarde 1 overtreft, is tevens een maat voor de snelheid waarmee de snijverliezen zullen afnemen als wij een toenemende lengte (p) van die snijcombinatie invoeren, en wij kiezen daarom voor een iteratie de snijcombinatie waarvoor $\sum a_i$ het grootst is. Het blijkt dat men dan reeds na een aantal van de orde van $1{,}5m$ iteraties het optimum bereikt.

Tegenover deze versnellingen die wij in het rekenprocédé hebben aangebracht, staan een aantal complicaties die bij de behandeling van het golfkartonprobleem in de praktijk optreden, ten dele door bijkomende beperkingen, ten dele ook door bijkomende vrijheden. Wij willen de belangrijkste hiervan vermelden.

De eerste beperking hangt ermee samen dat de golfkartonfabriek, zoals in de inleiding is vermeld, met twee machines werkt. Normaal zal men liefst beide machines volledig in werking houden. De orders van een week moeten derhalve zo over de beide machines worden verdeeld dat de beide geproduceerde totale baanlengten ongeveer gelijk zijn. Het toelaatbare verschil kan men op b.v. 5% stellen.

Een andere beperking is, dat ook rekening gehouden moet worden met de tijd, nodig voor het verstellen van de machines. Het overgaan op een andere ordercombinatie (C), waarvan dan een zekere baanlengte x moet worden geproduceerd, vereist het opnieuw instellen van alle snij-inrichtingen, en gedurende het verstellen moet de machine worden stilgezet. Dit geeft niet alleen een produktieverlies, maar ook een vergroting van de afval doordat een zekere baanlengte te lang in de droogsectie van de machine blijft. Een verstelling loont dus alleen de moeite als de lengte x niet te klein is. In de strenge theoretische oplossing zal daarom nog moeten worden nagegaan of zulk een combinatie met geringe x erin voorkomt, en die combinatie zal alsnog moeten worden geëlimineerd, ten koste van een iets groter theoretisch snijverlies.

Gewoonlijk wordt geëist dat de „golf" van het golfkarton in de te leveren rechthoekige platen evenwijdig loopt met een bepaalde zijde. Die zijde heet dan de „breedte", en de hierop loodrechte zijde moet in de lengterichting van de baan van de golfkartonmachine worden gelegd. Bij sommige platen echter (b.v. afdekplaten) is de richting van de golf niet van belang. Lengte en breedte van de platen van zo'n order mogen dan desgewenst verwisseld worden — voor het gehele aantal of eventueel voor een deel ervan. In de beschreven procedure heeft dit tot gevolg dat het aantal te proberen combinaties weer groter wordt, en dat de bijbehorende coëfficiënten, d.z. in ons voorbeeld de getallen in tabel III, breuken kunnen bevatten. Stel b.v. dat in ons voorbeeld, tabel I, voor order II lengte en breedte verwisseld mogen worden. Als nieuwe combinatie, C_{11}, treedt dan op dat men in de werkbreedte (2150 mm) 1 plaat van deze order van 500 mm lengte + nog 2 platen van order I kan onderbrengen. De „verwisselde" plaat is, wat zijn bijdrage tot het aantal platen van order II per strekkende meter baan betreft, equivalent met

[2]) De kunstgreep komt erop neer dat men van de getallen van de basiscombinaties (vgl. tabel II) eerst de zg. geïnverteerde matrix vormt. De coëfficiënten $a_1, a_2, \ldots$ voor elke snijcombinatie worden dan door eenvoudige vermenigvuldiging van de getallen van die combinatie met de rijen van de geïnverteerde matrix gevonden.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

800/500 „onverwisselde" platen van *II*, zodat C_{11} bestaat uit 2 platen van *I* en $1\frac{3}{5}$ plaat van *II*. Voorts krijgt men een nieuwe combinatie, C_{12}, doordat 2 verwisselde platen van order *II* naast 1 onverwisselde plaat van dezelfde order gelegd kunnen worden; C_{12} bestaat dus uit $4\frac{1}{5}$ plaat van order *II*. Men krijgt analoog ook nog combinaties C_{13} en C_{14}; zie *tabel IIIa*.

Tabel IIIa. Aanvulling der combinaties van tabel III voor het geval dat van de platen van order *II* de lengte en de breedte mogen worden verwisseld.

	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
order *I*	2	—	—	—
order *II*	$1\frac{3}{5}$	$4\frac{1}{5}$	$3\frac{1}{5}$	$1\frac{3}{5}$
order *III*	—	—	2	5
breedte van afvalstrook	150 mm	50 mm	90 mm	200 mm

Een praktisch zeer belangrijke vrijheid bij de planning betreft de vaststelling van het gevraagde aantal platen van elke order. Met de bestellers kan worden overeengekomen dat aan de fabriek een speling van b.v. $\pm$ 5% in het aantal wordt toegestaan. Deze vrijheid leidt tot een verfijning in de procedure van de lineaire programmering, bekend onder de naam van „bovengrenstechniek". Hierdoor wordt voor elke order, binnen de toegelaten grenzen, een zodanig aantal vastgesteld dat het uiteindelijke totale afvalpercentage zo klein mogelijk is. In het rekenwerk komt dit hierop neer dat nog een aantal extra-iteraties worden uitgevoerd.

Het programma van de rekenmachine

Wij kunnen op de rekenprocedure niet dieper ingaan dan boven is geschied, en wij willen tot slot alleen nog in het kort de samenstelling van het rekenmachineprogramma bespreken.

De orders worden, op bepaalde wijze gecodeerd, door een ponsband aan de machine toegevoerd. De codering bevat, behalve de gegevens over breedte, lengte en aantal, ook een vermelding of breedte en lengte al dan niet verwisselbaar zijn, voorts een vermelding van de eventuele speling in het aantal platen, en de machine voorziet elke toegevoerde order van een werknummer. Hebben de bestelde platen van twee orders toevallig dezelfde afmetingen, dan voegt de machine deze al dadelijk bij elkaar onder één werknummer.

Als eerste deel van het rekenprogramma volgt nu het genereren van de lijst van mogelijke paarsgewijze ordercombinaties in de werkbreedte. (In bepaalde gevallen, nl. bij gelijke lengten voor verschillende orders, mogen drie of meer breedten worden gecombineerd, deze combinaties kan men de machine eveneens laten opzoeken.) De lengten van de orders mèt verwisselbaarheid worden eveneens tot de vorming van paren gebruikt. Combinaties waarvan op wiskundige gronden kan worden gezegd dat zij in de eindoplossing niet zullen voorkomen, zoals we hierboven hebben aangestipt, verwijdert de machine dadelijk uit de lijst, evenzo combinaties die om technische redenen (b.v. met het oog op de nabewerking) ongewenst zijn. Er wordt een lijst van combinaties opgesteld voor de machine met de brede baan en een lijst voor de machine met de smalle baan.

Het tweede deel van het rekenprogramma bestaat in het maken van een basisoplossing, analoog met D_1-D_2-D_3 in het besproken voorbeeld. Hierna komen de „iteraties", waarbij de variatie van de ingevoerde lengten p telkens wordt onderworpen niet alleen aan de voorwaarde dat géén der lengten x negatief wordt, maar tevens aan de voorwaarde dat de totale lengten van de beide geproduceerde banen niet meer dan 5% van elkaar verschillen. Na het vinden van een optimale oplossing treedt het deel van het programma voor de „bovengrenstechniek" in werking, dit bepaalt het definitieve optimum, met toelaatbare afwijkingen in de orderaantallen.

Het laatste deel van het programma omvat het uitzeven van de eventuele combinaties met versneden lengten onder een bepaalde grens. Deze stap zet, wiskundig beschouwd, al het voorafgaande op losse schroeven, daar de eindoplossing in het algemeen niet meer optimaal zal zijn. Een exacte oplossing zou echter te veel rekentijd vergen, en men kan veilig aannemen dat de afwijking voor de praktijk er niet meer veel toe zal doen.

Om ten slotte te laten zien, hoe de resultaten van een berekening door de PASCAL er uitzien, geven wij in *tabel IV* nog een voorbeeld van een orderpakket, bestaande uit negen orders, *1-9*, waaronder vier „verwisselbare", en in *tabel V* de verdeling zoals

Tabel IV. Voorbeeld van een orderpakket, van negen orders, dat aan de PASCAL is toegevoerd.

ordernummer	breedte mm	lengte mm	gevraagd aantal platen	verwisselbaarheid (1 = ja)
1	1580	1414	365	—
2	1500	1290	4080	1
3	1475	1400	638	1
4	735	1500	3367	—
5	540	1455	850	—
6	530	1350	1275	—
7	500	1520	6734	—
8	359	900	5360	1
9	182	1440	3535	1

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

Tabel V. Resultaat van de berekening zoals dat door de PASCAL voor de orders van tabel IV is uitgetikt. In de eerste kolom ziet men dat er zeven combinaties uit de baan van de brede machine en drie uit die van de smalle worden gesneden. In de derde kolom is opgegeven hoeveel platen van de respectieve orders bij die combinatie naast elkaar in de baan zijn gelegd. Dit getal maal het „aantal slagen" geeft het „aantal stuks". In de laatste kolom wordt „af" getikt als de verkregen platen uit een combinatie het totale gevraagde aantal voor een order completeren.

machine, nummer van combinatie	order-nummer	aantal in combinatie	aantal stuks	lengte (mm)	aantal slagen	verwis-seld (1 = ja)	breedte (mm)	aantal meters	af
breed 1	2	1	2007	1500	2007	1	1290		
	4	1	2007	1500	2007	—	735	3011	
breed 2	5	4	852	1455	213	—	2160	310	af
breed 3	1	1	365	1414	365	—	1580		af
	6	1	383	1350	383	—	530	517	
breed 4	6	1	261	1350	261	—	530		
	9	9	2205	1440	245	—	1638	352	
breed 5	6	4	632	1350	158	—	2120	214	af
breed 6	8	2	5364	359	2682	1	1800		af
	9	2	1336	1440	668	—	364	963	af
breed 7	3	1	638	1475	638	1	1400		af
	4	1	627	1500	627	—	735	941	
smal 1	2	1	2073	1290	2073	—	1500	2675	af
smal 2	7	3	6735	1520	2245	—	1500	3412	af
smal 3	4	2	734	1500	367	—	1470	550	af

die door de PASCAL hiervoor is berekend en afgedrukt. Men ziet dat bij orders *3* en *8* de lengte als „breedte" genomen dient te worden, en dat bij order *2* een deel van het aantal met onverwisselde en een deel met verwisselde lengte en breedte moeten worden geproduceerd. De totale baanlengte geproduceerd door de brede machine blijkt 6310 m te worden, die van de smalle machine 6638 m (verschil ca. 5%). De totale geproduceerde oppervlakte is 23 818 m². De geproduceerde aantallen platen verschillen slechts heel weinig van de bestelde (de grootste voorkomende afwijking is 6 stuks, een gevolg van afrondingen in de berekening); zij beslaan te zamen een totale oppervlakte van 23 103 m². De snijverliezen bedragen dus 715 m², d.i. 3,0%.

De eigenlijke rekentijd van de PASCAL bedroeg voor dit orderpakket ongeveer 11 seconden. Gewoonlijk zijn de orderpakketten groter. Voor een meer normaal orderpakket, van b.v. 30 orders, is de rekentijd ongeveer 60 seconden. De invoertijd van het rekenprogramma en van de gegevens van het orderpakket is ongeveer 25 seconden.

Samenvatting. Een golfkartonmachine levert een doorlopende, kilometerslange baan golfkarton met een vaste breedte, b.v. 1,5 of 2 meter. Bij het versnijden van deze baan tot platen, die verschillende afmetingen moeten hebben om aan een reeks ontvangen orders te voldoen, ontstaan verliezen doordat de breedte van de baan niet volledig wordt benut. Men kan trachten een aantal platen zodanig in de baanbreedte te leggen dat de totale snijverliezen zo klein mogelijk worden. Het vinden van deze optimale wijze van versnijden voor een gegeven orderpakket is een wekelijks terugkerend probleem voor de golfkartonfabriek. Het probleem behoort tot een grote groep van problemen, die op zeer uiteenlopende gebieden van techniek en economie optreden. De wiskundige techniek die voor problemen van dit soort is uitgewerkt — de zg. lineaire programmering — wordt in dit artikel aan de hand van een getallenvoorbeeld toegelicht. Bij een enigszins omvangrijk orderpakket, b.v. 20 orders of meer, is het rekenwerk alleen met behulp van een elektronische rekenmachine praktisch uitvoerbaar. Ten behoeve van het produktiebureau van Philips' Golfkartonfabriek is de rekenmethode voor de PASCAL geprogrammeerd en wordt thans elke week als proef de berekening voor enige orderpakketten (elk van een bepaalde kwaliteit golfkarton) met deze rekenmachine uitgevoerd. Het probleem wordt gecompliceerd door een aantal bijkomende eisen, o.a. dat de twee beschikbare golfkartonmachines in de fabriek enigszins gelijkmatig moeten worden belast, en ook door een aantal bijkomende vrijheden, met name dat voor sommige orders de breedte en de lengte van de golfkartonplaten mogen worden verwisseld, en dat er in de aantallen bestelde platen een zekere speling kan zijn. Deze verfijningen zijn in het programma verwerkt.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

HET BEREKENEN VAN POTENTIAALVELDEN EN ELEKTRONENBANEN MET BEHULP VAN EEN ELEKTRONISCHE REKENMACHINE

door C. WEBER *).

518.5:537.213

Inleiding

In de elektronenoptiek is het van groot belang, in de ruimte tussen elektrodes met gegeven configuratie en gegeven potentialen de plaats van de elektronen als functie van de tijd te kennen. Dit probleem valt uiteen in twee delen: het bepalen van het potentiaalveld tussen de elektrodes, en het oplossen van de bewegingsvergelijking der elektronen in dit veld. Er zijn verscheidene methodes om deze vraagstukken op te lossen:

1) Zuiver wiskundige berekening van het potentiaalveld en de banen. Deze methode kan maar zelden worden toegepast. Er zijn namelijk slechts weinig systemen van elektrodes waarbinnen het potentiaalveld zonder gebruik van numerieke methodes berekend kan worden, en slechts in sommige van deze systemen zijn ook nog de banen voor berekening vatbaar.
2) Het rubbervel. Een horizontaal uitgespannen rubbervel dat overeenkomstig de vorm en de potentialen van de elektrodes vervormd is en waarover men kogeltjes laat rollen, is een mechanisch analogon van het elektrische probleem voor „tweedimensionele" gevallen [1]). Men kan er zeer vlot mee werken, maar de nauwkeurigheid is klein. De invloed van ruimtelading is alleen met veel moeite in rekening te brengen [2]).
3) Geleidend papier. Voor het bepalen van de potentiaal van „tweedimensionele" velden kan men ook gebruik maken van een vel geleidend grafietpapier [3]), waar de electrodes met een geleidende verf op geschilderd zijn. Ook hier is de ruimtelading moeilijk in rekening te brengen.
4) De elektrolytische trog. Ook de elektrolytische trog is een analogonsysteem waarmee men potentiaalvelden kan bepalen, en met behulp van een tweede analogonsysteem kunnen automatisch de banen geregistreerd worden [4]). Voor de elektronenoptiek is dit een zeer belangrijk hulpmiddel, aangezien hiermee in allerlei systemen van elektrodes de banen van de elektronen te bepalen zijn. Met het rubbervel heeft de trog gemeen dat de invloed van ruimtelading slechts met grote moeite in rekening gebracht kan worden.

   Een bezwaar van het werken met de trog is dat het vervaardigen van de modellen der elektrodes telkens veel tijd kost. Sneller gaat dit met de zg. wigtrog [5]), waarbij men van de elektrodes — die rotatiesymmetrisch moeten zijn — slechts een zo kleine sector behoeft na te bootsen dat men de modellen in één richting vlak mag nemen. De banen nabij de as (paraxiale banen) zijn in een trog niet nauwkeurig te bepalen, en juist deze banen zijn vaak heel belangrijk.
5) Het weerstandsnetwerk. Een vierde analogonsysteem is het weerstandsnetwerk [6]). Het neemt voor het bepalen van potentialen een belangrijke plaats in naast de elektrolytische trog. Er zijn netwerken voor het oplossen van vlakke, en andere voor het oplossen van rotatiesymmetrische problemen. Men kan er snel mee werken en de nauwkeurigheid voldoet vaak aan redelijke eisen. Ruimtelading kan men in rekening brengen door op de knooppunten van het netwerk bepaalde stromen toe te voeren. Ter wille van de nauwkeurigheid zou dit moeten gebeuren op een vrij groot aantal knooppunten; aan de hanteerbaarheid van deze methode doet dit uiteraard afbreuk.

   Uitgaande van de potentialen op de as van het netwerk met rotatiesymmetrie kan men de paraxiale elektronenbanen bepalen met behulp van een analogonrekenmachine [7]).
6) Numerieke methodes. Het numeriek bepalen van potentiaalverdelingen is tot voor kort niet op grote schaal gedaan, aangezien dit proces betrekkelijk langzaam convergeert. Pas de laatste tijd,

*) Philips' Natuurkundig Laboratorium, Eindhoven.

[1]) P. H. J. A. Kleijnen, De beweging van een elektron in tweedimensionale elektrische velden, Philips techn. T. **2**, 338-345, 1937. Zie ook de figuur in Philips techn. T. **13**, 112, 1951 en fig. 5 en 6 in Philips techn. T. **14**, 134, 1952.

[2]) G. Alma, G. Diemer en H. Groendijk, Elektronenbanen in ruimteladingsvelden, nagebootst op het rubbermembraan, Philips techn. T. **15**, 26-34, 1953.

[3]) W. Clausnitzer en H. Heumann, Ausmessung elektrischer Felder mit Hilfe von halbleitenden Schichten, Z. angew. Phys. **2**, 443-446, 1950.

[4]) J. L. Verster, Een apparaat voor het automatisch schrijven van elektronenbanen, Philips techn. T. **22**, 257-271, 1960. Zie ook de aldaar in noot [1]) aangehaalde literatuur.

[5]) M. Bowman-Manifold en F. H. Nicoll, Electrolytic field plotting trough for circularly symmetric systems, Nature **142**, 39, 1938.

[6]) J. C. Francken, Het weerstandsnetwerk, een eenvoudig en nauwkeurig hulpmiddel voor het bepalen van potentiaalverdelingen, Philips techn. T. **21**, 11-24, 1959.

[7]) A. J. F. de Beer, H. Groendijk en J. L. Verster, Het schrijven van elektronenbanen met behulp van een weerstandsnetwerk en een analogon-rekenmachine, Philips techn. T. **23**, 368-378, 1961 (no. 11).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

nu snel werkende elektronische rekenmachines ter beschikking zijn gekomen, komt deze methode in aanmerking. Een groot voordeel ervan is dat men zonder veel extramoeite de vergelijking van Poisson — die betrekking heeft op gevallen met ruimtelading — ermee kan oplossen.

Welke van deze methodes men in een gegeven geval zal toepassen, hangt sterk af van de aard van het probleem. Van invloed op de keus zijn de gewenste nauwkeurigheid, het al of niet verwaarlozen van ruimtelading, de snelheid waarmee men tot de einduitkomst wil komen, de vorm van de elektrodes, enz. Indien men over een elektronische rekenmachine beschikt, verdient in het algemeen de numerieke methode de voorkeur voor gevallen met ruimtelading.

Het in rekening brengen van ruimtelading betekent niet alleen dat een gecompliceerdere vergelijking moet worden opgelost, maar ook dat men voor de volgende moeilijkheid komt te staan: de in de vergelijking van Poisson voorkomende ruimtelading kan men pas berekenen als men de banen van de elektronen kent, maar voor het berekenen van deze banen is het nodig, de vergelijking van Poisson op te lossen, dus de ruimtelading te kennen. Om uit deze impasse te komen, gaan we iteratief te werk: we beginnen met de ruimtelading te schatten en met de geschatte waarden de vergelijking van Poisson op te lossen; uit de gevonden potentialen berekenen we de banen en corrigeren daarmee de ruimtelading; vervolgens lossen we opnieuw de vergelijking van Poisson op, enz. Dit iteratieve proces convergeert vrij snel naar een oplossing [2]). Als men gebruik maakt van een elektronische rekenmachine, zal het berekenen van de ruimtelading uit de banen van de elektronen ook met behulp van deze machine gebeuren. Dan wordt dus de gehele berekening machinaal uitgevoerd.

Van dit uitgebreide probleem: berekening van (a) potentiaalvelden, (b) banen en (c) ruimtelading, zullen in dit artikel alleen de gedeelten (a) en (b), waarvoor het werk nu voltooid is, worden beschreven. De berekeningen zijn van medio 1959 tot medio 1961 uitgevoerd in Philips' Rekencentrum [8]) op de elektronische rekenmachine type 650 van de International Business Machine Co. (*fig. 1*). Allerlei vraagstukken waarbij de ruimtelading bekend is of nul gesteld mag worden, zijn met de aanstonds te beschrijven methode op te lossen.

Intussen is de bij Philips ontwikkelde elektronische rekenmachine PASCAL in gebruik genomen [9]), en onlangs is men in het Rekencentrum gereed gekomen met de programmering van de gedeelten (a) en (b) zowel als (c) voor deze veel snellere machine. Binnenkort zal dan ook met het berekenen van potentiaalvelden, elektronenbanen en ruimteladingsverdelingen op de PASCAL een begin worden gemaakt.

Fig. 1. Twee elektronische rekenmachines IBM 650 in Philips' Rekencentrum te Eindhoven. A_1 en A_2 zijn de eigenlijke rekenmachines, B_1 en B_2 de ponskaartenmachines, en C_1 en C_2 de voedingsapparaten. De regeldrukker D doet dienst voor beide installaties.

Er zijn gevallen waarin men niet alleen met het elektrische veld, maar ook met een magnetisch veld rekening moet houden. Dit is b.v. het geval bij lopendegolfbuizen, waarvoor de elektronenbanen eveneens zijn berekend [10]). Het potentiaalveld wordt

[8]) Daarbij zijn wiskundige adviezen verstrekt door A. J. W. Duijvestijn en de programmering is verricht door H. B. Nota, beiden medewerkers van het Rekencentrum.

[9]) W. Nijenhuis, De PASCAL, een zeer snelle digitale elektronische rekenmachine voor Philips' Rekencentrum, Philips techn. T. **23**, 1-19, 1961 (no. 1).

[10]) Door E. Deimel, Philips' Hoofdindustriegroep Elektronenbuizen, Eindhoven. Zie in Mikrowellenröhren, Vorträge der Internationalen Tagung in München 7-11 Juni 1960, blz. 493-507; uitg. Vieweg, Brunswijk 1961.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

daarbij gevonden op dezelfde manier als wij hieronder zullen beschrijven; het berekenen van de banen en van de ruimtelading gaat echter geheel anders.

Het omzetten van de differentiaalvergelijking van Poisson in een differentievergelijking

De elektrische potentiaal V van een systeem waarin zich ruimtelading ϱ bevindt die een functie van de plaats is, wordt gegeven door de differentiaalvergelijking van Poisson:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\varrho}{\varepsilon_0}. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hierin is ε_0 de diëlektrische constante van de vrije ruimte.

Daar we ons in dit artikel beperken tot gevallen met rotatiesymmetrie, gaan we van de rechthoekige coördinaten x, y en z over op cilindercoördinaten r, φ en z (*fig. 2*), waarbij we de rotatieas kiezen als z-as. V is dan onafhankelijk van φ, zodat de afgeleiden naar φ nul zijn. Verg. (1) wordt nu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial z^2}=-\frac{\varrho}{\varepsilon_0}. \quad . \quad . \quad (2)$$

Voor het numeriek oplossen van dit soort vraagstukken lenen differentievergelijkingen zich

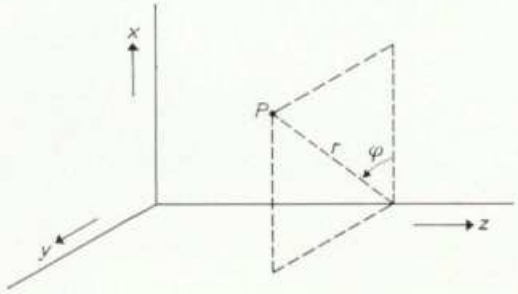


Fig. 2. Punt P met rechthoekige coördinaten x, y en z, en met cilindercoördinaten r, φ en z.

het best. Om deze reden leiden we uit de differentiaalvergelijking (2), die een verband legt tussen bepaalde afgeleiden van V, een differentievergelijking af die de betrekking tussen de potentialen in dicht bij elkaar gelegen punten beschrijft. Daartoe drukken we de afgeleiden van V in een punt P_0 uit in de potentiaal V_0 van P_0 en in de potentialen van nabijgelegen punten waarvan de afstanden h tot P_0 zo klein zijn dat in de straks te geven reeksontwikkeling de termen met de derde en hogere machten van h verwaarloosd mogen worden.

We onderscheiden twee gevallen: P_0 ligt buiten de z-as, en P_0 ligt op de z-as.

Punten buiten de z-as

Voor punten P_0 die *niet* op de z-as liggen, kunnen we volstaan met vier naburige punten, $P_1, \ldots, P_4$, op afstanden $h_1, \ldots, h_4$ van P_0 gelegen (*fig. 3*). Zoals

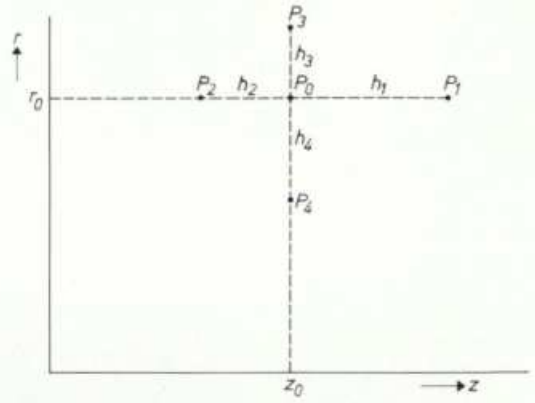


Fig. 3. Punt P_0 op afstand r_0 van de z-as (die as van rotatiesymmetrie is), omgeven door punten P_1, P_2, P_3 en P_4 op afstanden $h_1, \ldots, h_4$ van P_0.

verderop zal blijken, is het wel bij vele, maar niet bij alle punten P_0 mogelijk, deze vier afstanden onderling even groot te kiezen; om deze reden leiden wij hier de differentievergelijking af voor het algemenere geval van ongelijke h's.

We ontwikkelen V in een reeks van Taylor om het punt P_0, waarvan de coördinaten r_0 en z_0 zijn:

$$V(r,z)=V(r_0,z_0)+\frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0(r-r_0)+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0(z-z_0)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0(r-r_0)^2+2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial z}\right)_0(r-r_0)(z-z_0)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0(z-z_0)^2\right]+\ldots . \quad . \quad (3)$$

De coördinaten van $P_1, \ldots, P_4$ zijn resp. (r_0, z_0+h_1), (r_0, z_0-h_2), (r_0+h_3, z_0) en (r_0-h_4, z_0). Uit (3) vinden we voor de potentialen $V_1, \ldots, V_4$ in deze punten:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_0+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 h_1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 h_1^2+\ldots,\\ V_2 &= V_0-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 h_2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 h_2^2-\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

en analoog voor V_3 en V_4.

Als de punten $P_1, \ldots, P_4$ zo dicht bij P_0 liggen dat de termen met de derde en hogere machten van $h_1, \ldots, h_4$ verwaarloosd mogen worden, vinden we uit (4) voor de eerste en de tweede partiële afgeleide van V naar z resp. naar r:

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = \frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)}V_1 - \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}V_2 + \frac{h_1-h_2}{h_1h_2}V_0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{2}{h_1(h_1+h_2)}V_1 + \frac{2}{h_2(h_1+h_2)}V_2 - \frac{2}{h_1h_2}V_0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = \frac{h_4}{h_3(h_3+h_4)}V_3 - \frac{h_3}{h_4(h_3+h_4)}V_4 + \frac{h_3-h_4}{h_3h_4}V_0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0 = \frac{2}{h_3(h_3+h_4)}V_3 + \frac{2}{h_4(h_3+h_4)}V_4 - \frac{2}{h_3h_4}V_0. \quad \ldots \quad (5)$$

Hiermee zijn de afgeleiden van V in het punt P_0 uitgedrukt in de potentiaal van P_0 en in die van de naburige punten $P_1, \ldots, P_4$. Substitueren we (5) in de differentiaalvergelijking (2), dan gaat deze laatste over in de volgende differentievergelijking:

$$\frac{2}{h_1(h_1+h_2)}V_1 + \frac{2}{h_2(h_1+h_2)}V_2 + \frac{2r_0+h_4}{h_3(h_3+h_4)r_0}V_3 + \frac{2r_0-h_3}{h_4(h_3+h_4)r_0}V_4 = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} + \left[\frac{2}{h_1h_2} + \frac{2r_0+h_4-h_3}{h_3h_0r_0}\right]V_0, \quad \ldots \quad (6)$$

waarin ϱ_0 de ruimtelading ter plaatse P_0 is.

Indien de punten $P_1, \ldots, P_4$ op gelijke afstanden van P_0 gekozen kunnen worden ($h_1 = h_2 = h_3 = h_4$, stel $= h$), vereenvoudigt (6) zich tot:

$$V_1 + V_2 + \left(1+\frac{h}{2r_0}\right)V_3 + \left(1-\frac{h}{2r_0}\right)V_4 = -\frac{\varrho_0 h^2}{\varepsilon_0} + 4V_0. \quad \ldots \quad (7)$$

Punten op de z-as

De vergelijkingen (6) en (7) gelden niet op de z-as, waar r_0 nul is en de termen met $1/r_0$ dus oneindig groot zijn. Om een differentievergelijking af te leiden die wèl voor punten op de z-as van kracht is, keren we terug tot de differentiaalvergelijking van Poisson in de oorspronkelijke vorm, (1). Om P_0 heen kiezen we nu *zes* punten zoals is aangegeven in *fig. 4*. Wegens de rotatiesymmetrie kiezen we de punten $P_3, \ldots, P_6$ op gelijke afstanden (h_3) van P_0, zodat in deze vier punten de potentiaal dezelfde is ($V_3 = V_4 = V_5 = V_6$). Op soortgelijke wijze als in de vorige paragraaf komen we dan tot de volgende differentievergelijking:

$$\frac{2}{h_1(h_1+h_2)}V_1 + \frac{2}{h_2(h_1+h_2)}V_2 + \frac{4}{h_3^2}V_3 = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} + \left(\frac{4}{h_3^2} + \frac{2}{h_1h_2}\right)V_0. \quad \ldots \quad (8)$$

In de gevallen waarin men h_1 en h_2 gelijk aan h_3 ($= h$) kan kiezen, vereenvoudigt (8) zich tot:

$$V_0 + V_2 + 4V_3 = -\frac{\varrho_0 h^2}{\varepsilon_0} + 6V_0. \quad \ldots \quad (9)$$

Fig. 4. Punt P_0 op de z-as, omgeven door de zes punten $P_1, \ldots, P_6$ op afstanden h_1, h_2 en h_3 van P_0 (wegens de rotatiesymmetrie liggen P_4, P_5 en P_6 op dezelfde afstand h_3 van P_0 als P_3).

Randvoorwaarden

Om het potentiaalveld te kunnen bepalen, moet men ook de randvoorwaarden kennen, d.w.z. op een gesloten „rand" (het oppervlak van de elektrodes) moet de potentiaal gegeven zijn. Willen we het potentiaalveld tussen b.v. twee concentrische geleidende bollen berekenen, dan dienen de potentiaal van de binnenste en die van de buitenste bol bekend te zijn.

Het iteratieproces

Om met behulp van de differentievergelijkingen een potentiaalveld te berekenen, brengen we in het r-z-vlak evenwijdig met de coördinaatassen een fijnmazig net aan, bestaande uit vierkantjes met zijde h. Als eenvoudig voorbeeld is in *fig. 5* de situatie getekend voor het zoëven genoemde geval dat we het potentiaalveld tussen twee concentrische bollen willen berekenen, d.w.z. de potentiaal in elk van de snijpunten van het net dat zich tussen de randen bevindt (i.c. tussen de cirkels volgens welke de bollen het r-z-vlak snijden; wegens de symmetrie kan men hier genoegen nemen met halve cirkels). De in totaal N snijpunten die zich *tussen* (niet *op*) deze randen bevinden, nummeren we van 1 tot en met N zoals in fig. 5 voor een aantal van deze punten is gedaan. De snijpunten van het net die toevallig juist *op* een rand vallen, zijn gemerkt met een kruisje.

Sommige van de punten $i = 1, \ldots, N$ liggen in r- of in z-richting minder dan de afstand h van de rand verwijderd (b.v. de punten 111, 228, 260, 315). Bij *deze* punten kunnen dus niet alle afstanden tot de omringende punten $P_1, \ldots, P_4$ even groot zijn, zodat men daar is aangewezen op de verg. (6) of (8), die voor ongelijke h's geldt. Verreweg de meeste punten $1, \ldots, N$ echter liggen zo ver van de rand dat de h's even groot kunnen zijn, zodat men daar gebruik kan maken van de eenvoudige formule (7) of (9).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

We beginnen met voor de potentialen in de punten 1, . . ., N van het net willekeurige waarden in te vullen, hoewel deze in het algemeen natuurlijk niet aan de differentievergelijking zullen voldoen. Voor de potentiaal in het punt 1 kunnen we nu een waarde vinden die wèl aan genoemde vergelijking voldoet, door de willekeurig gekozen waarde te vervangen door de waarde die met behulp van de differentievergelijking te berekenen is uit de potentialen in de omliggende punten. Nadat we zo voor de potentiaal in punt 1 een betere waarde hebben gevonden, laten we op dezelfde manier de potentiaal van punt 2 aan de differentievergelijking voldoen. Dit heeft weliswaar tot gevolg dat de potentiaal in punt 1 niet meer voldoet, maar dit zal aanstonds in orde worden gebracht. Op dezelfde manier gaan we te werk voor de punten 3 tot en met N.

Aan het eind gekomen, hebben we een toestand verkregen waarin de meeste der gevonden potentialen nog niet aan de differentievergelijking voldoen. Daarom beginnen we, weer bij punt 1, aan een tweede cyclus, dan aan een derde, enz. Hoe vaker we dit doen, des te beter zullen de potentialen aan de vergelijking voldoen, dus des te kleiner zullen de aan te brengen correcties zijn. Men kan bewijzen dat met iedere cyclus de waarden dichter naar een eindoplossing zullen convergeren en dat deze onafhankelijk van de gekozen beginwaarden is en in alle punten aan de differentievergelijking voldoet.

Versnelling van de convergentie door middel van successieve overrelaxatie

Zelfs met een elektronische rekenmachine vergt het veel tijd om op de beschreven manier in een redelijk groot aantal punten de potentiaal te berekenen. Daarom heeft het zin, te zoeken naar een methode die het proces sneller doet convergeren, zodat men met een kleiner aantal cyclussen kan volstaan.

We beschouwen punt i van het net. De potentiaal die we voor dit punt na k cyclussen hebben gevonden, duiden we aan met $V_i^{(k)}$, en die na $k+1$ cyclussen

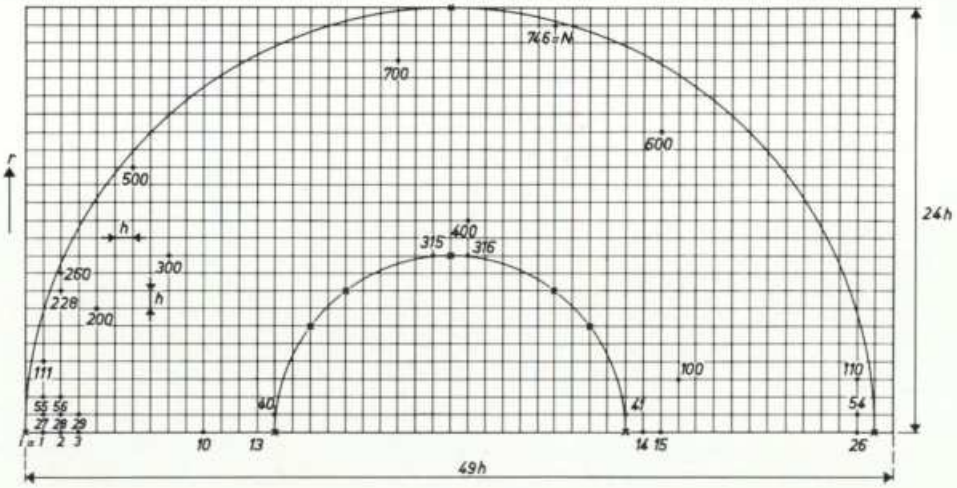


Fig. 5. Het r-z-vlak is voorzien van een net van vierkantjes met zijde h. Ter berekening van de potentiaal in de netpunten is de doorsnede van de elektrodes — hier twee concentrische bollen — met het r-z-vlak getekend (wegens de symmetrie kan men volstaan met de helft van de doorsnede). De netpunten *tussen* de halve cirkels zijn genummerd volgens horizontale rijen. De netpunten die toevallig *op* een van de halve cirkels vallen, zijn gemerkt met een kruisje.

met $V_i^{(k+1)}$. Bij toenemende k naderen deze potentialen tot de eindwaarde V_i (*fig. 6*). In een bepaald stadium van de $(k+1)$ste cyclus hebben we $V_i^{(k+1)}$ berekend, terwijl de vorige waarde, $V_i^{(k)}$, nog bij het punt i genoteerd staat. Is $V_i^{(k+1)}$ b.v. groter dan $V_i^{(k)}$, dan is het redelijk, te onderstellen dat de nog onbekende waarde $V_i^{(k+2)}$ eveneens groter dan $V_i^{(k+1)}$ zal uitvallen. Daarom gaan we nu — op de

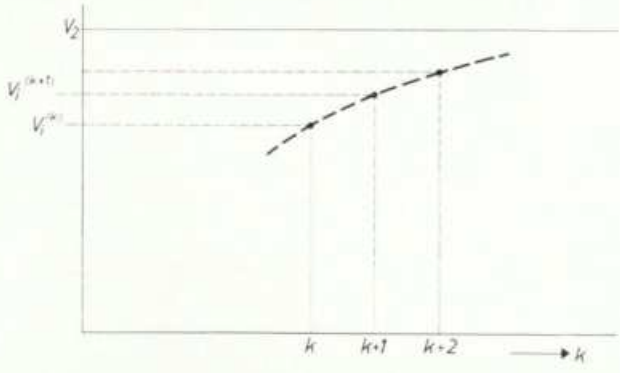


Fig. 6. De voor het netpunt i berekende potentiaal nadert bij toenemend aantal iteratiecyclussen tot V_i. Na k cyclussen heeft men de waarde $V_i^{(k)}$ gevonden. Is de waarde $V_i^{(k+1)}$, die men na $k+1$ cyclussen zou vinden, b.v. groter dan $V_i^{(k)}$, dan is het waarschijnlijk dat $V_i^{(k+2)}$, na $k+2$ cyclussen, nog groter zal zijn. Men versnelt de convergentie door $V_i^{(k)}$ niet te vervangen door $V_i^{(k+1)}$, maar door een wat grotere waarde, volgens verg. (10) (successieve overrelaxatie).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

te voorziene ontwikkeling vooruitlopend — de waarde $V_i^{(k)}$ niet vervangen door $V_i^{(k+1)}$, maar alvast door een nog wat grotere waarde, namelijk door

$$V_i^{(k)} + \omega \left[V_i^{(k+1)} - V_i^{(k)} \right], \quad . \; . \quad (10)$$

waarin de factor ω groter is dan 1. Deze methode wordt successieve overrelaxatie genoemd.

De waarde van ω moet zorgvuldig gekozen worden. Voor $\omega = 1$ hebben we weer de oude situatie, waarbij de waarde $V_i^{(k+1)}$ wordt ingevuld. Kiezen we ω te groot, dan zal de volgende waarde verder van V_i af liggen in plaats van er dichter bij; de convergentiesnelheid is dan kleiner in plaats van groter. Er is een bepaalde optimale waarde van ω waarmee het proces het snelst convergeert. Aangetoond kan worden dat deze *optimale waarde alleen afhangt van de configuratie der elektrodes*, en niet van de potentialen waarvan we zijn uitgegaan. Eveneens kan worden bewezen dat de beste waarde van ω onafhankelijk is van het cyclusnummer k [11]).

Voor bepaalde eenvoudige configuraties is de optimale waarde van ω te berekenen (zie Aanhangsel). Daaruit kunnen we tot een schatting van de gunstigste waarde komen voor gevallen met minder eenvoudige configuratie.

Toepassing van successieve overrelaxatie kan het iteratieproces aanzienlijk versnellen. Is de rand b.v. een cilinder met lengte $49h$ en straal $24h$, dan wordt het iteratieproces, als men de optimale waarde van ω gebruikt, bekort met een factor 24. Als men weet dat de rekenmachine ook dan nog een tijd van ruim $1\frac{1}{2}$ uur voor ons probleem nodig had, zal het duidelijk zijn dat deze besparing zeer belangrijk is.

De berekening van potentiaalvelden met de IBM 650

De elektronische rekenmachine IBM 650, waarop in Philips' Rekencentrum de berekeningen van potentiaalvelden en elektronenbanen zijn uitgevoerd, heeft één geheugen, en wel een magnetisch trommelgeheugen voor 2000 „woorden", waarin zowel getallen als opdrachten worden opgeborgen [12]). De machine werkt in het tientallige stelsel. Een woord bestaat uit tien cijfers.

In overeenstemming met de inrichting van de machine nemen we voor de onderhavige soort problemen een vast ruitjesnet van 50 punten (49 mazen) in de z-richting en van 25 punten (24 mazen) in de r-richting; in totaal dus $50 \times 25 = 1250$ punten. De rand met de gegeven potentialen moet binnen de rechthoek van 49×24 mazen vallen (fig. 5). Met elk punt van het net laten we in het geheugen een woord corresponderen. De informatie van ieder woord zal moeten omvatten: de potentiaal V en de ruimtelading ϱ in het desbetreffende punt, alsmede een instructie I, waarop we aanstonds terugkomen.

Het berekenen van V gaat met een nauwkeurigheid van vier cijfers, ϱ wordt eveneens in vier cijfers gegeven, en voor I zijn twee cijfers nodig. In het woord (tien cijfers) worden de eerste twee cijferplaatsen gebruikt voor I, de volgende vier voor V, en de laatste vier voor ϱ (*fig.* 7).

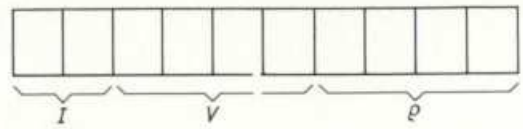


Fig. 7. Een „woord" van de elektronische rekenmachine IBM 650 bestaat uit tien cijfers. De eerste twee cijferplaatsen worden gebruikt voor de instructie I, de volgende vier voor de potentiaal V, en de laatste vier voor de ruimtelading ϱ.

De machine moet onderscheid maken tussen de volgende vijf soorten van punten:

a) Punten met een vaste potentiaal; dit zijn punten van de rand en punten buiten de rand.
b) Punten op de z-as waarvoor verg. (9) geldt.
c) Punten op de z-as waarvoor verg. (8) geldt, dus waarbij ten minste één van de afstanden h_1, h_2, h_3 ongelijk aan h is.
d) Punten buiten de z-as waarop verg. (7) van toepassing is.
e) Punten buiten de z-as waarvoor verg. (6) van kracht is, dus waarbij ten minste één van de afstanden $h_1, \ldots, h_4$ ongelijk aan h is.

Dit onderscheid wordt gemaakt aan de hand van het getal dat in het instructiegedeelte staat (98, 88 of 89), in combinatie met de waarde van r_0 ($= 0$ of > 0):

	$r_0 = 0$	$r_0 > 0$
$I = 98$	soort (a)	soort (a)
$I = 88$	soort (b)	soort (d)
$I = 89$	soort (c)	soort (e)

Voordat we de machine met rekenen laten beginnen, zorgen we ervoor dat alle begingegevens zijn toegevoerd, d.w.z. dat in het instructiegedeelte en in het ruimteladingsgedeelte van ieder woord de juiste waarden staan. Op de randen moet de potentiaal de voorgeschreven waarden hebben; voor de potentialen in de overige punten vullen we willekeurige getallen in.

[11]) Om praktische redenen wordt steeds met een vast getal ω gewerkt, dat voor alle punten hetzelfde is (ω dus ook onafhankelijk van i).

[12]) Voor een verklaring van deze termen, zie b.v. het in [9]) aangehaalde artikel.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

De gang van zaken bij de berekening is weergegeven in het blokschema *fig. 8*. De machine gaat achtereenvolgens alle punten van het net langs, beginnend links beneden, dan langs de z-as naar rechts, vervolgens van links naar rechts alle punten één rij hoger, enz. Is b.v. het punt j aan de beurt [13]), dan wordt in blok *3* onderzocht, tot welk van de vijf soorten dit punt behoort. Afhankelijk van de uitslag van dit onderzoek wordt één van de blokken *4a*,. . ., *4e* gekozen (de letters *a*,. . ., *e* corresponderen met de bovenstaande indeling in vijf soorten). Blok *4a*, voor punten met vaste potentiaal, verandert de potentiaal op de geheugenplaats van punt j niet. De blokken *4b*, . . ., *4e* daarentegen vervangen de potentiaal op de geheugenplaats j door een andere, die berekend wordt uit de desbetreffende differentievergelijking, met toepassing van successieve overrelaxatie volgens verg. (10). Het rekenorgaan kan eenvoudige rekenkundige bewerkingen uitvoeren, zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, maar ook kunnen getallen getransporteerd worden van het geheugen naar het rekenorgaan en omgekeerd. Iedere bewerking, b.v. optelling of transport, heeft zijn eigen getalcode. Het programma bestaat uit een opeenvolging van codegetallen, waardoor de juiste volgorde van optellingen, transporten e.d. is vastgelegd.

We beschouwen nu het door blok *4b* gevormde programmagedeelte nader. Allereerst moeten door

[13]) De in het voorgaande gebruikte letter i duidde één van de N punten van het ruitjesnet aan waar de potentiaal berekend moest worden, met uitsluiting dus van punten op en punten buiten de rand (fig. 5). De rekenmachine echter onderzoekt achtereenvolgens alle 1250 punten van het ruitjesnet; ter onderscheiding gebruiken we hiervoor de letter j.

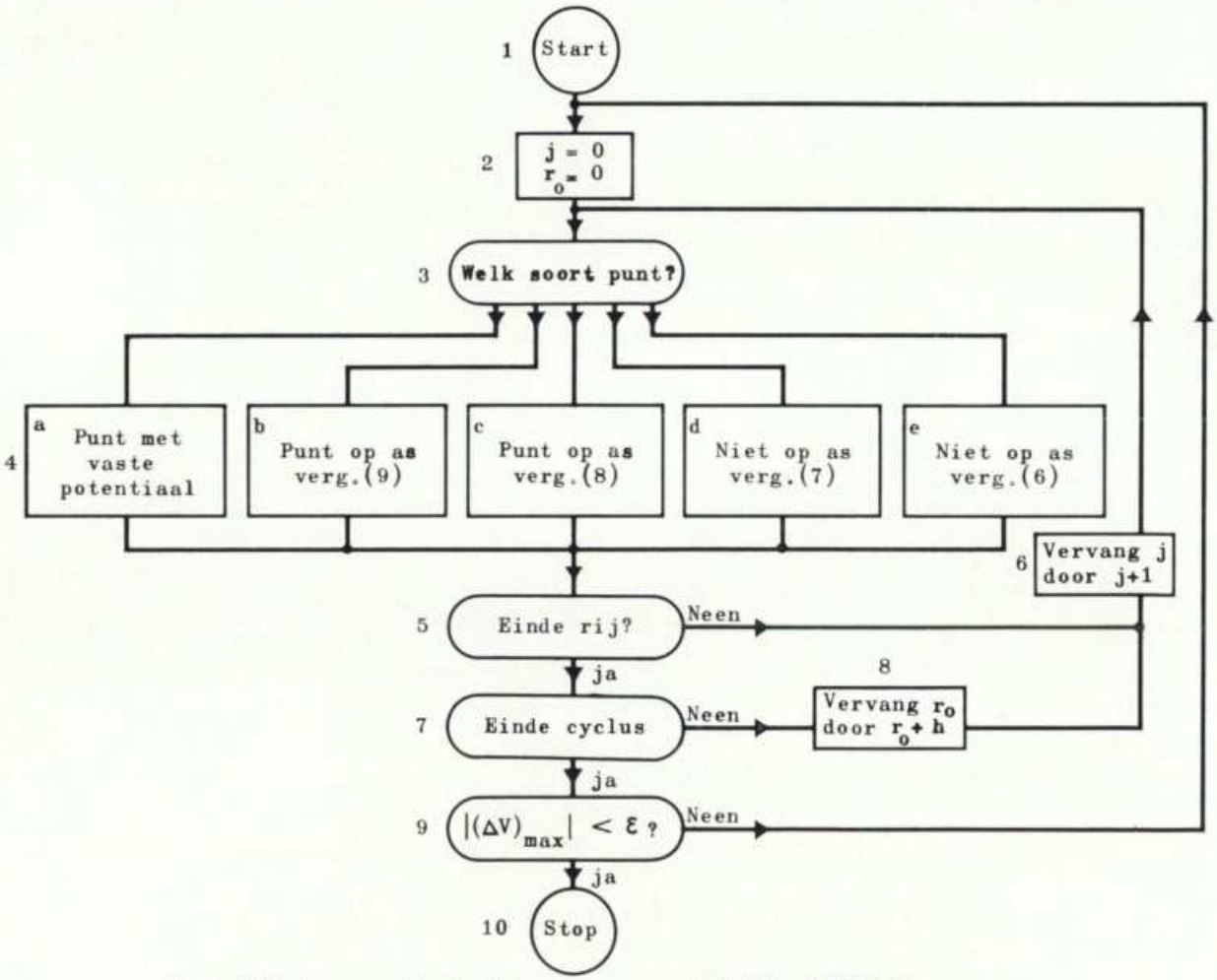


Fig. 8. Blokschema voor het berekenen van een potentiaalveld op de IBM 650.
1 start. In blok *2* worden j en r_0 gelijk aan hun beginwaarden gesteld. Blok *3* onderzoekt, tot welk van de vijf soorten *a*, . . ., *e* het punt j behoort. Naar gelang van de uitslag van dit onderzoek houdt blok *4a* de potentiaal van het onderhavige punt vast of wijzigt één van de blokken *4b*, . . . , *4e* de potentiaal in overeenstemming met de bijbehorende formule. Vervolgens onderzoekt blok *5* of het punt het laatste van een rij is. Zo niet, dan wordt overgegaan tot het volgende punt; daartoe krijgt blok *6* de opdracht: „vervang j door $j+1$". Was het punt wèl het laatste van een rij, dan gaat blok *7* na of het eind van een cyclus is bereikt. Zo niet, dan wordt overgegaan tot de volgende rij (blok *8*); zo wel, dan onderzoekt blok *9* of $|(\Delta V)_{max}|$ al kleiner dan ε is geworden. Daarvan is afhankelijk of de machine moet doorgaan met rekenen dan wel moet stoppen (blok *10*).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

middel van optellen en aftrekken, uitgaande van het getal j, de geheugenplaatsen berekend worden waar de potentialen V_1, V_2, V_3 en V_0, die in verg. (9) voorkomen, zich bevinden. Vervolgens moet het potentiaalgedeelte worden afgesplitst uit de woorden die op deze geheugenplaatsen staan. Ook moet het ruimteladingsgedeelte van punt j worden afgesplitst. Daarna moet uit deze potentialen en uit de ruimtelading de nieuwe potentiaal berekend worden. Dit geschiedt door de optellingen en vermenigvuldigingen die daarvoor nodig zijn, stap voor stap na elkaar uit te voeren. Tot slot moet in het woord dat bij punt j behoort, het potentiaalgedeelte worden vervangen door de nieuwe potentiaal, en het zo ontstane nieuwe woord moet worden opgeborgen op de desbetreffende geheugenplaats. Als dit gebeurd is, gaat de machine verder met het programmagedeelte dat blok *5* vormt. Bij het punt $j+1$ wordt weer hetzelfde programmagedeelte doorlopen, met de potentialen en de ruimtelading die bij dit nieuwe punt behoren.

Blok *5* onderzoekt bij ieder punt of het aan het eind van een horizontale rij ligt. Is dit bij punt j niet het geval, dan wordt dezelfde procedure toegepast op punt $j+1$ van de rij; blok *6* zorgt voor het vervangen van j door $j+1$. Is daarentegen punt j wèl het laatste van een rij, dan volgt de berekening een andere weg in het blokschema: blok *7* gaat dan na of het eind van de cyclus is bereikt. Als dit niet het geval is, wordt overgegaan tot de volgende rij. Daartoe moet eerst r_0 in de differentievergelijking worden vergroot met het bedrag h (blok *8*). Vervolgens wordt begonnen aan de volgende rij.

Was wèl het eind van een cyclus bereikt, dan moet de machine aan de volgende cyclus beginnen, en wel met het punt in de hoek links beneden (fig. 5), dus nadat j en r_0 gelijk aan nul zijn gesteld. Op deze wijze zou de machine echter nooit met rekenen ophouden. Om een criterium te hebben of het iteratieproces ver genoeg is gevorderd, laten we de machine voor elk punt niet alleen de nieuwe potentiaal berekenen, maar tevens het verschil tussen de oude en de nieuwe potentiaal. De berekening van dit verschil, $(\Delta V)_j$, gebeurt in de blokken *4b*,. . ., *4e* (ter wille van de overzichtelijkheid is dit bij de bespreking van de gang van zaken in blok *4b* weggelaten). De absolute waarde van $(\Delta V)_j$ wordt opgeborgen op een vaste plaats in het geheugen. Wordt daarna voor het volgende punt het verschil tussen de oude en de nieuwe potentiaal berekend, dan gaat de machine na of de absolute waarde $|(\Delta V)_{j+1}|$ van dit verschil groter of kleiner dan $|(\Delta V)_j|$ is. Op de plaats in het geheugen waar $|(\Delta V_j)|$ stond, komt nu het grootste van de twee bedragen $|(\Delta V)_j|$ en $|(\Delta V)_{j+1}|$ te staan. Aan het eind van de cyclus staat in het geheugen de grootste potentiaalcorrectie, $|(\Delta V)_{\max}|$, die in deze cyclus is voorgekomen. Na een groot aantal cyclussen zal $|(\Delta V)_{\max}|$ ten slotte tot nul naderen. Na afloop van elke cyclus wordt in blok *9* een tevoren vastgesteld bedrag ε afgetrokken van $|(\Delta V)_{\max}|$. Is de uitkomst positief, dan begint de machine aan een nieuwe cyclus; is de uitkomst nul of negatief, dan stopt de machine.

Kiezen we ε gelijk aan 1 of 2 eenheden van de laatste cijferplaats, dan blijkt $|(\Delta V)_{\max}|$ meestal niet aan een zo kleine waarde toe te komen. Dit is een gevolg van de overrelaxatie. Wanneer namelijk het iteratieproces bijna afgelopen is, krijgen afrondingsfouten grote invloed. Op deze fouten wordt successieve overrelaxatie toegepast, met het gevolg dat het proces niet meer convergeert. Daarom kiezen we ε bij voorkeur gelijk aan ongeveer 5 eenheden van de laatste cijferplaats. Heeft $|(\Delta V)_{\max}|$ deze grotere waarde ε bereikt, dan stellen we de machine zo in dat de factor ω in (10) gelijk aan 1 is. De machine werkt nu zonder overrelaxatie, en zo laten we hem nog even doorrekenen; dit komt de nauwkeurigheid van de einduitkomst ten goede.

Het is van belang dat de berekening snel geschiedt vooral in die blokken die vaak doorlopen worden, zoals het blok *4d*, dat de potentiaal berekent in de punten van de soort (*d*), die het talrijkst zijn.

Een kwestie waar we ook op moeten letten, is die van de schaal. Voor de potentiaal staan, zoals gezegd, vier cijferplaatsen ter beschikking. Het is van belang dat al deze vier plaatsen ook worden gebruikt. Dat wil zeggen dat de eenheid van potentiaal niet zo ongelukkig moet worden gekozen dat alle getallen met één of meer nullen beginnen. Anderzijds mogen ook geen cijfers links van de vier beschikbare plaatsen vallen. Het gunstigst kiest men de eenheid van potentiaal zo dat de hoogste potentiaal $V_{\max}$ die in het vraagstuk voorkomt, de getalwaarde 9999 krijgt. Op deze wijze maakt men van de beschikbare cijferplaatsen een zo doeltreffend mogelijk gebruik.

Duiden we de door de machine geleverde getalwaarden van de potentiaal aan met $v = 9999\, V/V_{\max}$ dan kunnen we verg. (7) herleiden tot:

$$v_1 + v_2 + \left(1+\frac{1}{2n}\right)v_3 + \left(1-\frac{1}{2n}\right)v_4 = -\frac{9999\,\varrho_0 h^2}{\varepsilon_0 V_{\max}} + 4v_0.$$

Hierin is $n = r_0/h$ een dimensieloze grootheid, en wel steeds een geheel getal. Uit de vergelijking blijkt dat de geschiktste eenheid van ruimtelading is: $\varepsilon_0 V_{\max}/9999h^2$.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

De differentievergelijking van de banen

Nu het potentiaalveld bekend is, gaan we over tot het berekenen van de banen die de elektronen in dit veld beschrijven. We gebruiken weer de cilindercoördinaten r, φ en z.

Het elektrische veld heeft in de z-richting de component $-\partial V/\partial z$. De kracht die op een elektron (lading $-e$, massa m) in de z-richting werkt, is dus $e\,\partial V/\partial z$, en de versnelling in de z-richting is:

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{m}\frac{\partial V}{\partial z}, \text{ stel} = L(r,z). \quad . \; . \quad (11)$$

De versnelling in de r-richting, $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$, bestaat in de eerste plaats uit een analoge term: $(e/m)\partial V/\partial r$, maar bovendien uit een term $r(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)^2$, die afkomstig is van de middelpuntvliedende kracht. Deze laatste term kunnen we anders schrijven. Wegens de rotatiesymmetrie werkt er geen andere kracht in de φ-richting, zodat, volgens de wet van behoud van impulsmoment, $r^2\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = r_0^2(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)_0$ (de index 0 heeft betrekking op de begintoestand, ten tijde $t = 0$). Het aandeel dat de middelpuntvliedende kracht tot de versnelling in de r-richting bijdraagt, $r(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)^2$, kan derhalve ook zo worden geschreven: $(r_0^4/r^3)(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)_0^2$. Voor de totale versnelling in de r-richting vinden we dus:

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{m}\frac{\partial V}{\partial r} + \left[r_0^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_0\right]^2\frac{1}{r^3}, \text{ stel} = K(r,z). \quad (12)$$

Samen met de begintoestand bepalen de verg. (11) en (12) de beweging van het elektron, dus de plaats waar het elektron zich op elk moment bevindt.

Om het vraagstuk numeriek op te lossen, zetten we de differentiaalvergelijkingen (11) en (12) om in differentievergelijkingen. De afstand van het elektron tot de z-as, r, is een functie van de tijd t. Deze functie ontwikkelen we in de omgeving van $t = t_0$ in een reeks van Taylor:

$$r(t+\Delta t) = r(t_0) + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\Delta t + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t_0}\Delta t^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t^3}\right)_{t_0}\Delta t^3 + \\ + \tfrac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^4r}{\mathrm{d}t^4}\right)_{t_0}\Delta t^4 + \tfrac{1}{120}\left(\frac{\mathrm{d}^5r}{\mathrm{d}t^5}\right)_{t_0}\Delta t^5 + \ldots .$$

We beschouwen r op de tijdstippen $t_0 - \tau$, en $t_0 + \tau$, die van t_0 een klein bedrag τ verschillen. In de bovenstaande reeks vervangen we Δt eerst door τ en dan door $-\tau$, en tellen de twee uitkomsten bij elkaar op; τ kiezen we zo klein dat termen met machten van τ die hoger dan 5 zijn, verwaarloosd mogen worden. Het resultaat is:

$$r(t_0+\tau) + r(t_0-\tau) = 2r(t_0) + \tau^2\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t_0} + \frac{\tau^4}{12}\left(\frac{\mathrm{d}^4r}{\mathrm{d}t^4}\right)_{t_0}. \\ . \; . \; . \quad (13)$$

Op soortgelijke wijze is $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ in een reeks te ontwikkelen, waarmee we, na een analoge berekening, vinden:

$$\tau^2\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t_0+\tau} + \tau^2\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t_0-\tau} = 2\tau^2\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t_0} + \tau^4\left(\frac{\mathrm{d}^4r}{\mathrm{d}t^4}\right)_{t_0}. \quad (14)$$

Nu maken we gebruik van de differentiaalvergelijking (12). Als de waarden van r en z ten tijde t bekend zijn, is de waarde van de functie K ten tijde t te bepalen; deze waarde duiden we aan met K_t. Door uit (13) en (14) $(\mathrm{d}^4r/\mathrm{d}t^4)$ te elimineren en gebruik te maken van (12), vinden we de gezochte differentievergelijking:

$$r(t_0+\tau) = 2r(t_0) - r(t_0-\tau) + \tfrac{1}{112}\tau^2K_{t_0-\tau} + \tfrac{10}{112}\tau^2K_{t_0} + \\ + \tfrac{1}{112}\tau^2K_{t_0+\tau}. \quad . \; . \; . \quad (15)$$

Evenzo vinden we voor de z-richting:

$$z(t_0+\tau) = 2z(t_0) - z(t_0-\tau) + \tfrac{1}{112}\tau^2L_{t_0-\tau} + \tfrac{10}{112}\tau^2L_{t_0} + \\ + \tfrac{1}{112}\tau^2L_{t_0+\tau}. \quad . \; . \; . \quad (16)$$

Als r en z op de tijdstippen $t_0 - \tau$ en t_0 bekend zijn, stellen de verg. (15) en (16) ons in staat, r en z ten tijde $t_0 + \tau$ te berekenen, echter niet voordat nog een moeilijkheid is overwonnen. K en L op de tijdstippen $t_0 - \tau$ en t_0 zijn te berekenen, aangezien we r en z op die tijdstippen kennen. Maar dit geldt niet voor K en L op het tijdstip $t_0 + \tau$. We moeten daarom ook hier iteratief te werk gaan: uitgaande van de waarden van K en L ten tijde $t_0 - \tau$ en t_0, maken we door extrapolatie een schatting van K en L ten tijde $t_0 + \tau$; met deze geschatte waarden berekenen we uit (15) en (16) r en z, en deze r en z gebruiken we om K en L opnieuw te berekenen; wijken de nieuwe waarden te veel van de oorspronkelijk geschatte waarden af, dan berekenen we met de nieuwe waarden wederom r en z. Dit proces wordt herhaald tot K en L constant blijven. Dan hebben we ook de juiste waarden van r en z. Het proces convergeert in de regel zo snel dat we na één maal corrigeren al klaar zijn.

De differentievergelijking van het begin van de baan

We zullen nu twee gevallen behandelen: van de baan zijn gegeven: a) het eerste en het tweede punt (die met een tijdverschil τ worden gepasseerd), b) de beginplaats en de beginsnelheid.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

a) Zijn het eerste en het tweede punt gegeven, dan berekenen we daaruit op de beschreven wijze het derde punt, vervolgens uit het tweede en het derde punt het vierde, enz. We vinden aldus punten van de baan die het elektron met gelijke tijdverschillen passeert.

b) Zijn daarentegen de beginplaats en de beginsnelheid gegeven, dan is het de vraag hoe we aan het tweede punt komen, om dan verder de onder (a) genoemde methode te volgen. De weg daartoe is dat we de verg. (11) en (12) voor de begintoestand twee maal integreren naar de tijd.

Stel dat K in de eerste vier punten ($t = 0, \tau, 2\tau$ en 3τ) bekend is. We benaderen K door een polynoom, en wel, met het oog op de vereiste nauwkeurigheid, door een polynoom van de derde graad:

$$K_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

waarin de coëfficienten $a_0, \ldots, a_3$ zodanige functies van de gegeven grootheden $K_0, \ldots, K_3$ zijn dat het polynoom voor de eerste vier punten resp. de waarde K_0, K_1, K_2, K_3 aanneemt. We vinden dus niet alleen het gezochte tweede punt van de baan, maar tegelijk ook het derde en het vierde.

Door het polynoom twee maal naar de tijd te integreren, vinden we:

$$r(t) = r_0 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_0 t + \tfrac{1}{2}a_0 t^2 + \tfrac{1}{6}a_1 t^3 + \tfrac{1}{12}a_2 t^4 + \tfrac{1}{20}a_3 t^5. \quad (17)$$

De integratieconstanten zijn zo gekozen dat (17) voor $t = 0$ voldoet aan de beginvoorwaarden.

Als we de a's uitdrukken in de gegeven K's, kunnen we uit (17) r_1, r_2 en r_3 berekenen:

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= r_0 + \tau\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \tfrac{97}{360}\tau^2 K_0 + \tfrac{19}{60}\tau^2 K_1 - \tfrac{13}{120}\tau^2 K_2 + \\
&\quad + \tfrac{1}{45}\tau^2 K_3, \\
r_2 &= r_0 + 2\tau\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \tfrac{28}{45}\tau^2 K_0 + \tfrac{23}{15}\tau^2 K_1 - \tfrac{2}{15}\tau^2 K_2 + \\
&\quad + \tfrac{2}{45}\tau^2 K_3, \\
r_3 &= r_0 + 3\tau\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \tfrac{39}{40}\tau^2 K_0 + \tfrac{27}{10}\tau^2 K_1 + \tfrac{27}{40}\tau^2 K_2 + \\
&\quad + \tfrac{3}{20}\tau^2 K_3.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

Voor z gelden dergelijk formules; men behoeft in (18) slechts r te vervangen door z, en K door L.

Om de eerste vier waarden van r en z te vinden, gaan we iteratief te werk: voor de eerste schatting stellen we de K's en de L's gelijk aan K_0 resp. L_0; daarna berekenen we r en z voor de eerste vier punten met behulp van (18) en van de overeenkomstige vergelijkingen voor de z's, en uit deze r en z vinden we betere waarden van K en L. Ook dit proces convergeert snel.

Als de eerste vier punten gevonden zijn, berekenen we de verdere punten met (15) en (16).

Berekening van K en L

Voor het bepalen van de door (11) en (12) gedefinieerde grootheden K en L hebben we de partiële afgeleiden van de potentiaal V naar r en z in een gegeven punt (r,z) nodig. Daartoe bepalen we eerst de afgeleiden in het dichtstbijgelegen netpunt (r_0,z_0) met behulp van de volgende formules (zie *fig. 9*):

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{r_0,z_0} &= \frac{V_1 - V_2}{2h}, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r_0,z_0} = \frac{V_3 - V_4}{2h}, \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_{r_0,z_0} &= \frac{\dfrac{V_1 - V_0}{h} - \dfrac{V_0 - V_2}{h}}{h} = \frac{V_1 + V_2 - 2V_0}{h^2}, \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_{r_0,z_0} &= \frac{\dfrac{V_3 - V_0}{h} - \dfrac{V_0 - V_4}{h}}{h} = \frac{V_3 + V_4 - 2V_0}{h^2}, \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial z}\right)_{r_0,z_0} &= \frac{\dfrac{V_5 - V_6}{2h} - \dfrac{V_7 - V_8}{2h}}{2h} = \frac{V_5 + V_8 - V_6 - V_7}{4h^2}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

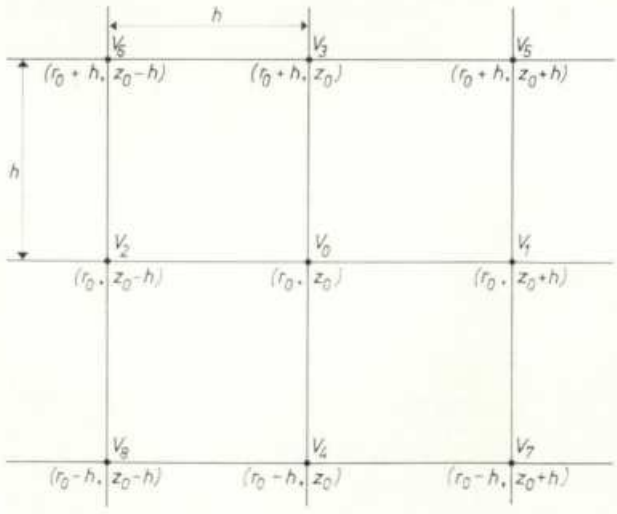


Fig. 9. Aan de hand van deze figuur kunnen de vergelijkingen (19) worden opgeschreven.

De afgeleiden in het punt (r,z) kunnen nu berekend worden door middel van een „tweedimensionele" reeksontwikkeling om het netpunt (r_0,z_0). Met behulp van deze afgeleiden vindt men K en L uit de verg. (11) en (12).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

De berekening van de banen met de IBM 650

Het blokschema *fig. 10* toont de manier waarop men de rekenmachine de banen van de elektronen laat berekenen. Men begint met door middel van een

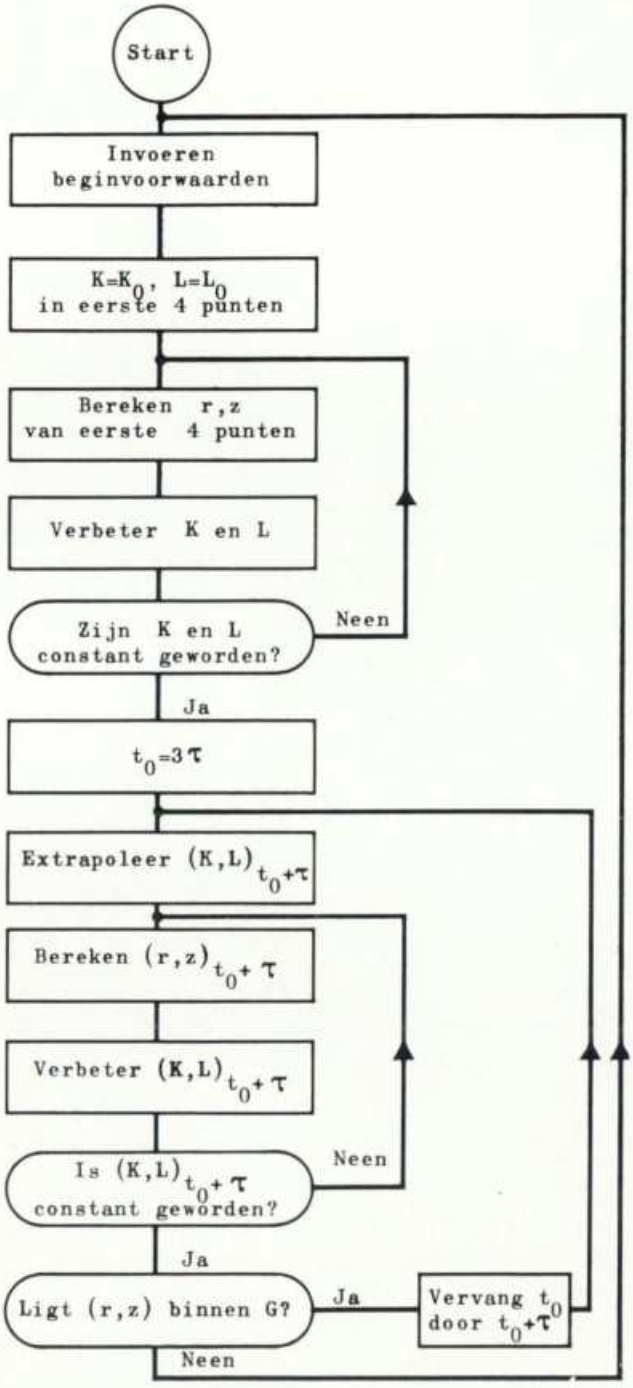


Fig. 10. Blokschema van het berekenen van elektronenbanen op de IBM 650.

ponskaart de beginvoorwaarden r_0, z_0, $(dr/dt)_0$, $(dz/dt)_0$ en $(d\varphi/dt)_0$ aan de machine toe te voeren. Hiermee moet de machine als eerste stap uit (18) langs iteratieve weg de eerste vier punten van de baan bepalen; als eerste schatting worden daarbij, zoals boven is uiteengezet, $K = K_0$ en $L = L_0$ gesteld.

Nadat de eerste vier punten zo zijn berekend, gebeurt het bepalen van de verdere punten met behulp van de verg. (15) en (16). Het programma voor een volgend punt verschilt daarbij van het programma voor het zojuist behandelde punt slechts in zoverre dat overal $t_0 + \tau$ staat in plaats van t_0. De machine berekent nu door extrapolatie K en L op het tijdstip $t_0 + \tau$.

In het r-z-vlak is een gebied G gegeven waarbinnen de banen berekend moeten worden. Vindt de machine na enige tijd een punt (r,z) dat buiten het gebied G ligt, dan betekent dit dat de baan ver genoeg is berekend en dat dus kan worden overgegaan tot het bepalen van de volgende baan. Daartoe worden de beginvoorwaarden van deze nieuwe baan toegevoerd. Wanneer alle ponskaarten met beginvoorwaarden zijn afgewerkt, zijn alle banen berekend en stopt de machine.

Wat betreft de schaal, merken we op dat het doelmatig is, als eenheid van lengte de grootste lengte en als eenheid van snelheid de grootste snelheid te kiezen die in het vraagstuk voorkomen. Uit deze twee eenheden volgt de eenheid van tijd. Het gebruik van deze eenheden waarborgt een zodanige orde van groote der verkregen getallen dat de nauwkeurigheid van de berekening maximaal is.

Voorbeelden

Twee concentrische bollen

Als eerste voorbeeld beschouwen we nogmaals een geval met twee concentrische geleidende bollen. De binnenste bol laten we nu fungeren als katode. Indien de elektronen zonder beginsnelheid van de katode vertrekken, zijn de ruimtelading en de potentiaal binnen zulk een systeem vatbaar voor exacte berekening [14]), zodat de met de rekenmachine verkregen uitkomsten hieraan getoetst kunnen worden.

Bij gegeven ruimteladingsverdeling is met de IBM 650 langs iteratieve weg het potentiaalveld tussen de bollen berekend (binnenste bol straal $7h$, potentiaal 0000; buitenste bol straal $21h$, potentiaal 9999; deze stralen zijn dus anders dan in fig. 5).

[14]) I. Langmuir en K. B. Blodgett, Currents limited by space charge between concentric spheres, Phys. Rev. **24**, 49-59, 1924. — De tabellen in het artikel van Langmuir en Blodgett waren voor ons doel niet nauwkeurig genoeg; daarom hebben wij ze met grotere nauwkeurigheid opnieuw berekend.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

Tabel I. Waarde van $|(\Delta V)_{max}|$ na elk van de 60 cyclussen die bij de berekening van het potentiaalveld tussen twee concentrische bollen nodig waren om $|(\Delta V)_{max}|$ te doen afnemen tot 1 eenheid in het laatste cijfer. Voor deze 60 cyclussen was een tijd van ca. 100 minuten nodig.

Cyclus no.	$\|(\Delta V)_{max}\|$	Cyclus no.	$\|(\Delta V)_{max}\|$	Cyclus no.	$\|(\Delta V)_{max}\|$
1	9999	21	0814	41	0034
	7422		1030		0032
	7025		1060		0024
	7324		0855		0018
5	7605	25	0547	45	0021
	7384		0463		0014
	7042		0444		0008
	6683		0464		0010
	5913		0487		0009
10	4933	30	0423	50	0007
	4413		0281		0007
	3971		0241		0007
	3565		0154		0006
	3293		0072		0005
15	2544	35	0081	55	0002
	2698		0100		0002
	1787		0082		0001
	1982		0059		0001
	1757		0058		0001
20	2377	40	0043	60	0001

Doordat bij de katode de ruimtelading oneindig groot wordt, gelden de numerieke verg. (6) en (7) niet meer in de buurt van de katode. De wet volgens welke de ruimtelading bij tot nul afnemende afstand tot de katode naar oneindig gaat, is echter bekend [14]); men kan hiervoor bij de berekening dus een correctie aanbrengen, wat in dit voorbeeld dan ook is gebeurd.

Er waren 60 iteratiecyclussen nodig. $|(\Delta V)_{max}|$ was daarbij afgenomen tot 1. Elke cyclus duurde ca. 100 seconden; de totale tijd was dus ca. 100 minuten. *Tabel I* geeft de waarde van $|(\Delta V)_{max}|$ na elke cyclus. De grootste afwijking van de iteratief berekende ten opzichte van de exact berekende potentiaal bedroeg 3 eenheden in het laatste cijfer.

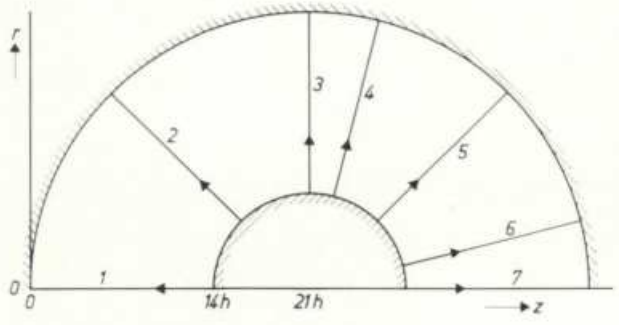


Fig. 11. Zeven elektronenbanen (*1*, . . ., *7*) tussen twee concentrische bollen met stralen *7h* en *21h*. De kleinste bol fungeert als katode. De beginsnelheid van de elektronen is nul ondersteld.

Elektronen die met een radiaal gerichte beginsnelheid van de katode vertrekken, beschrijven in een bolsymmetrische configuratie uiteraard radiaal lopende, rechte banen. Zeven van zulke banen zijn getekend in *fig. 11*. Deze banen hebben we ook berekend uit het iteratief bepaalde potentiaalveld; de grootste afwijking ten opzichte van de theoretische banen bedroeg slechts een fractie van een ruitje.

Elektronenkanon van een beeldbuis

Het tweede voorbeeld betreft het potentiaalveld in het elektronenkanon van een beeldbuis. *Fig. 12* geeft een schets van het kanon in doorsnede. De ruimtelading is bij de berekening nul ondersteld.

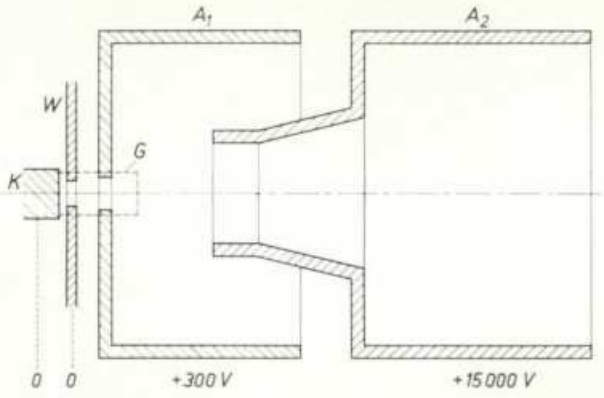


Fig. 12. Axiale doorsnede van het elektronenkanon van een beeldbuis. *K* katode. *W* wehneltcilinder. A_1 eerste anode. A_2 tweede anode. Het potentiaalverloop langs de gestippelde rechthoek *G* is tevoren bepaald met een weerstandsnetwerk; de gevonden waarden zijn gebruikt als randvoorwaarden bij de iteratieve berekening van het potentiaalveld met de IBM 650.

Met behulp van een weerstandsnetwerk [5]) is op verkleinde schaal een schatting gemaakt van de potentialen langs de gestippelde rechthoek *G* in fig. 12. Daarna is met deze potentiaalverdeling als randvoorwaarde het potentiaalveld binnen deze rechthoek iteratief berekend. Het resultaat vindt men in *fig. 13*, die tevens laat zien, in welke vorm de regeldrukker van de machine de oplossing aflevert. De potentiaalschaal was zo gekozen dat de maximumpotentiaal (links beneden in fig. 13) door ongeveer 9999 werd voorgesteld. (Om redenen die hier niet ter zake doen, was in dit geval bij alle potentiaalwaarden 0400 opgeteld; vandaar dat de potentiaal van de katode en die van de wehneltcilinder de waarde 0400 hebben.)

Ten slotte zijn ook nog de banen berekend die de met snelheid nul van de katode vertrekkende elektronen in dit potentiaalveld doorlopen. Enige van deze banen zijn in fig. 13 aangegeven.

Aanhangsel: Convergentiesnelheid van iteratieprocessen

Om een indruk te geven van de convergentiesnelheid bij iteratieproblemen van de besproken soort, behandelen we hier

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

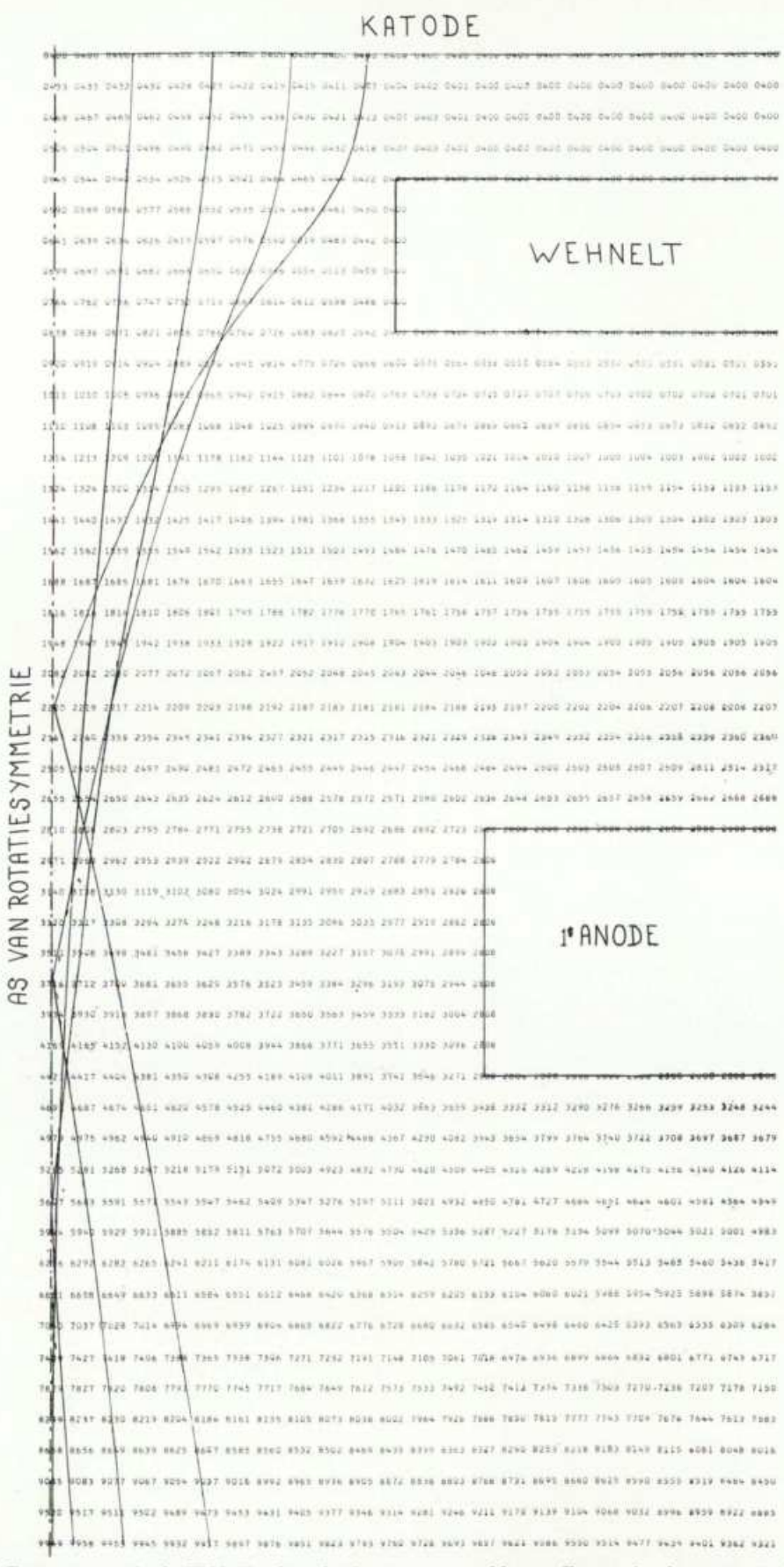


Fig. 13. De vorm waarin de IBM 650 de oplossing van een probleem aflevert, i.e. het potentiaalveld binnen de rechthoek G in het elektronenkanon van fig. 12. (Alle waarden moeten met 0400 verminderd worden.) Ingetekend zijn de as van rotatiesymmetrie, de omtrek van de elektrodes en het verloop van enige elektronenbanen met beginsnelheid nul.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

eerst het volgende eenvoudige iteratievraagstuk:

$$V_0^{(k+1)} = \tfrac{1}{4}V_1^{(k)} + \tfrac{1}{4}V_2^{(k)} + \tfrac{1}{4}V_3^{(k)} + \tfrac{1}{4}V_4^{(k)} + \\ + \frac{1}{2n}\left[V_3^{(k)} - V_4^{(k)}\right], \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

waarin $n = r_0/h$. De potentiaalwaarde van de $(k+1)$ste cyclus berekenen we dus geheel uit de oude potentiaalwaarden van de k-de cyclus, zonder successieve overrelaxatie toe te passen. De methode die we gaan volgen, is die van Garabedian [15]). We schrijven daartoe (20) in deze vorm:

$$\frac{V_1^{(k)} + V_2^{(k)} - 2V_0^{(k)}}{h^2} + \frac{V_3^{(k)} + V_4^{(k)} - 2V_0^{(k)}}{h^2} + \frac{V_3^{(k)} - V_4^{(k)}}{2nh^2} = \\ = \frac{4}{h}\,\frac{V^{(k+1)} - V_0^{(k)}}{h}.$$

We vervangen nu de stapsgewijs met 1 toenemende index k door een index t die continu toeneemt, en wel zodanig dat telkens wanneer k met 1 omhoog gaat, t met het bedrag h groter is geworden. Door deze vervanging komt in het rechterlid van de laatste vergelijking de differentie-uitdrukking voor $(4/h)(\partial V_0/\partial t)$ te staan. Keren we terug tot de differentiaalvorm, dan krijgen we de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{4}{h}\,\frac{\partial V}{\partial t}.$$

De methode van scheiding der variabelen geeft als oplossing:

$$V = V^{(\infty)}(r,z) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} b_\alpha \exp(-h\lambda_\alpha t/4)\, V_\alpha(r,z), \quad . \quad . \quad (21)$$

waarin V_α en λ_α gegeven worden door de oplossing van de volgende eigenwaardevergelijking:

$$\frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_\alpha}{\partial r} + \lambda_\alpha V_\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

met de randwaarden nul.

$V^{(\infty)}(r,z)$ is de oplossing van het gestelde probleem, met de gegeven randvoorwaarden. Beginnen we met willekeurig gekozen beginwaarden van de potentiaal, dan is de fout te ontbinden in de eigenfuncties V_α; de coëfficiënten zijn dan de constanten b_α uit (21). Hoe elke term van deze reeks na verloop van een aantal iteratiecyclussen afneemt, wordt gegeven door $\exp(-h\lambda_\alpha/4)$. Na elke iteratiecyclus zal dan de term dus afnemen met de factor $\exp(-h^2\lambda_\alpha/4)$. Na een groot aantal cyclussen wordt de convergentiesnelheid bepaald door de kleinste eigenwaarde λ_α; de andere termen zijn dan al verwaarloosbaar klein geworden.

Heeft de begrenzing van het gebied de vorm van een omwentelingscilinder, met lengte ph en straal qh (*fig. 14*), dan kunnen we de eigenwaarden van (22) berekenen met behulp van de methode van scheiding der variabelen. We vinden dan voor de kleinste eigenwaarde:

$$\lambda_{\min} = \frac{\pi^2}{p^2h^2} + \frac{\mu_1^2}{q^2h^2},$$

waarin μ_1 het eerste nulpunt van de besselfunctie van de orde nul is.

Wanneer we al een redelijk groot aantal iteratiecyclussen hebben uitgevoerd, dan zal de convergentiesnelheid praktisch worden bepaald door deze $\lambda_{\min}$. De fout zal dan dus na iedere volgende iteratie afnemen met de factor

$$\exp\left[-\left(\frac{\pi^2}{4p^2} + \frac{\mu_1^2}{4q^2}\right)\right] \approx 1 - \frac{\pi^2}{4p^2} - \frac{\mu_1^2}{4q^2}.$$

(De benadering geldt indien p^2 en q^2 groot ten opzichte van 1 zijn.)

Een beschouwing, soortgelijk aan die welke we hier voor het genoemde eenvoudige geval hebben gegeven, is van toepassing wanneer men gebruik maakt van successieve overrelaxatie. De overrelaxatiefactor ω komt dan voor in de factoren waarmee de eigenfuncties V_α afnemen. Men kan de waarde van ω bepalen waarvoor de absolute waarde dezer factoren minimaal wordt; deze waarde van ω geeft de snelste convergentie [16]).

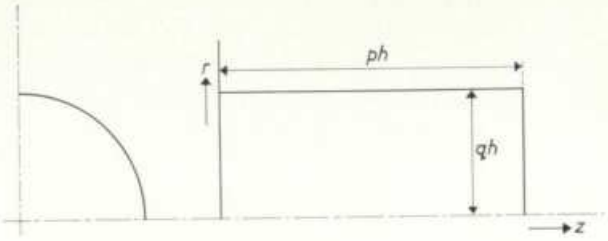


Fig. 14. Omwentelingscilinder met de z-as als as en begrensd door platte vlakken loodrecht op de z-as. Lengte ph, straal qh. Voor dit eenvoudige geval is $\lambda_{\min}$ te berekenen. Voor vele ingewikkelder gevallen is de cilinder, met goed gekozen p en q, een voldoend nauwkeurige benadering.

Is de begrenzing van het gebied niet rotatiecilindrisch van vorm, dan is de eigenwaardevergelijking (22) niet eenvoudig op te lossen. In zulke gevallen kan men zich het best behelpen door de begrenzing te benaderen door een zo goed mogelijk aangepaste rotatiecilinder, en de optimale waarde van ω die men daarvoor vindt, toe te passen voor het geval met de oorspronkelijke begrenzing [17]).

Samenvatting. Een voor de elektronenoptiek belangrijk vraagstuk is, te bepalen hoe de elektronen zullen bewegen in de ruimte tussen elektrodes met een gegeven configuratie en elk met een bekende potentiaal. Onderwerp van dit artikel is de numerieke methode ter oplossing van dit vraagstuk. Een groot voordeel van de numerieke methode is dat ze ook van toepassing is op gevallen met ruimtelading (vergelijking van Poisson). Ze vergt veel rekenwerk, maar is toch van grote praktische betekenis geworden, dank zij het beschikbaar komen van elektronische rekenmachines.

Besproken wordt het omzetten van de differentiaalvergelijking van Poisson voor het potentiaalveld in een differentievergelijking. Vervolgens worden het iteratieproces behandeld en de methode van successieve overrelaxatie ter versnelling van de convergentie. Daarna wordt de differentievergelijking van de banen afgeleid. Verklaard wordt, hoe in Philips' Rekencentrum het berekenen van potentiaalvelden en banen gebeurt met de elektronische rekenmachine IBM 650 (de programmering voor de snellere machine PASCAL is pas onlangs voltooid).

Twee voorbeelden illustreren het behandelde; ze betreffen de ruimte tussen twee concentrische bollen en de ruimte binnen het elektronenkanon van een beeldbuis.

In een aanhangsel wordt de convergentiesnelheid van iteratieprocessen behandeld.

[15]) P. R. Garabedian, Estimation of the relaxation factor for small mesh size. Mathematical tables and other aids to computation **10**, 183-185, 1956.

[16]) Een andere methode om deze optimale waarde van ω te vinden, is dat men de gevonden waarde van $\lambda_{\min}$ substitueert in bepaalde formules die volgen uit een theorie van Young. Zie: D. Young, Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 92-111, 1954.

[17]) D. Young, ORDVAC solutions of the Dirichlet problem, J. Ass. Computing Machinery **2**, 137-161, 1955.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

BEREKENING VAN LUIDSPREKERMAGNETEN VAN FERROXDURE

door M. F. REYNST *) en W. Th. LANGENDAM *).

538.26:621.395.623.742

Voor magneetsystemen van luidsprekers gebruikt men zowel metaalmagneten (vervaardigd van legeringen van het type „Ticonal") als magneten van het keramische materiaal ferroxdure. Duidelijke scheidingslijnen tussen gebieden waar men op grond van zuiver technische overwegingen „Ticonal" dan wel ferroxdure dient toe te passen, kan men niet trekken. Bij de huidige stand der techniek kan men met ferroxdure gewoonlijk platter construeren, wat soms van voordeel kan zijn; anderzijds kan men met „Ticonal" gemakkelijker constructies realiseren waarbij de uitwendige spreidingsflux zeer gering is.

Een steeds weerkerend probleem is de berekening van het magnetische circuit. Dit komt er gewoonlijk op neer dat in een ringvormige luchtspleet van gegeven afmetingen — waarin de luidsprekerspoel een plaats moet vinden — een bepaalde magnetische inductie moet worden opgewekt. De opgave is dan, de afmetingen van de magneet te bepalen. Hierbij is het moeilijk de invloed van de spreiding en van enige andere factoren, die nog ter sprake komen, op de juiste wijze in rekening te brengen [1]). Om dit met succes te doen, dient men in het algemeen over ervaring te beschikken.

In dit artikel wordt een praktische rekenwijze besproken voor gebruik bij het ontwerpen van het magneetsysteem van luidsprekers die zijn uitgerust met een ringmagneet van ferroxdure. Dergelijke systemen zijn op de in *fig. 1* geschetste manier samengesteld uit de ringmagneet, twee weekijzeren eindplaten en een weekijzeren kern. Volgens de rekenwijze kan men, bij gegeven afmetingen van het systeem, zowel de inductie in de luchtspleet met voldoende nauwkeurigheid ($\pm 3\%$) berekenen, als de inductie in het ferroxdure ($\pm 5\%$). De methode verschaft tevens de mogelijkheid, vast te stellen hoe men de magneet zou moeten dimensioneren om in de luchtspleet een voorgeschreven inductie te krijgen met een magneet van zo gering mogelijk volume. Spreiding enz. wordt in rekening gebracht door middel van een tweetal coëfficiënten, die men uit de gegevens van het systeem rechtstreeks kan bepalen met formules die langs empirische weg zijn verkregen uit metingen aan systemen volgens fig. 1. Men mag dan ook niet verwachten dat de methode goede resultaten geeft voor systemen die niet volgens fig. 1 zijn samengesteld. In *fig. 2* is een luidspreker met ferroxduremagneet afgebeeld.

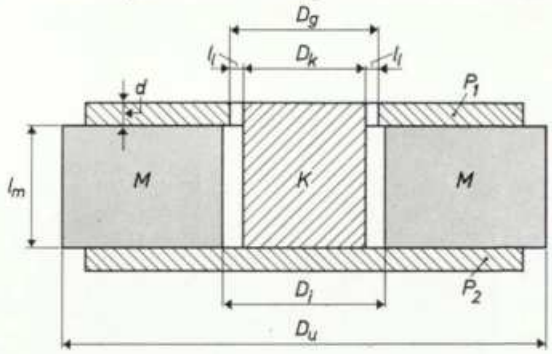


Fig. 1. Magnetisch systeem van normale constructie voor luidsprekers met een magneetring M van anisotroop ferroxdure. Een dergelijk systeem is gewoonlijk platter dan een systeem dat is uitgerust met een magneet van „Ticonal". De diameters van de weekijzeren bovenplaat P_1 en onderplaat P_2 zijn iets kleiner dan de buitendiameter D_u van de magneetring; dit levert een winst van enige procenten op voor de flux in de luchtspleet l_l tussen de bovenplaat en de weekijzeren kern K.

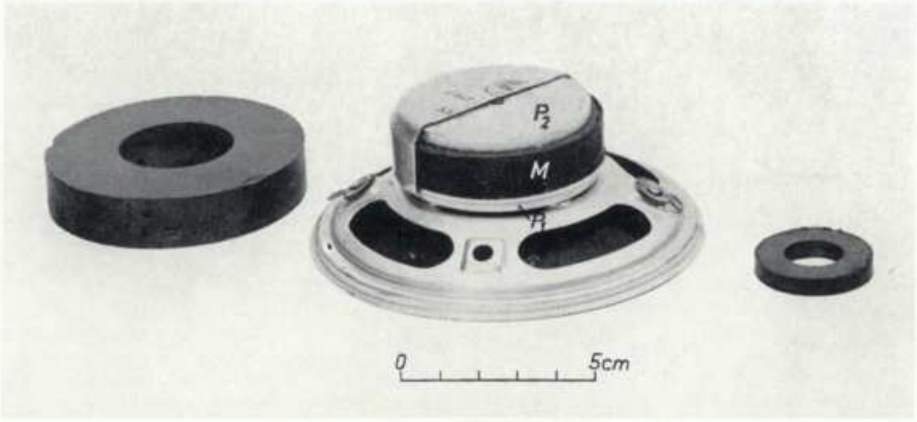


Fig. 2. Een luidspreker met een magneet van ferroxdure. De kap is gedeeltelijk verwijderd om het magneetsysteem zichtbaar te maken. Betekenis der letters als in fig. 1. De twee erbij gelegde ferroxdure-ringen geven een indruk van de uiterste afmetingen die bij luidsprekers gewoonlijk voorkomen. Voor speciale doeleinden worden nog grotere ringen gebruikt.

*) Philips' Hoofdindustriegroep Icoma (Industrial Components and Materials), Eindhoven.

[1]) Zie b.v. G. Hennig, Dauermagnettechnik, Franzis-Verlag, München 1952, blz. 49 e.v. Ook: A. Th. van Urk, Het gebruik van moderne staalsoorten voor permanente magneten, Philips techn. T. **5**, 33-40, 1940.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

Voor de bepaling van de afmetingen van de magneet met minimaal volume hebben we grafieken samengesteld. De berekeningen hiervoor zijn in Philips' Rekencentrum uitgevoerd met behulp van een elektronische rekenmachine van het type IBM 650. In hetgeen volgt, presenteren we eerst deze grafieken en lichten hun gebruik toe. Daarna bespreken we hoe de formules voor het ontwerpen van luidsprekersystemen zijn verkregen en hoe hieruit de grafieken voor magneten met minimaal volume zijn afgeleid.

Wat de grafieken betreft, dient nog te worden opgemerkt dat men de magneetring van een luidspreker dikwijls niet volgens de op minimaal volume berekende dimensies zal uitvoeren. In het algemeen leiden deze minimale volumes tot zeer platte ringen met grote buitendiameters, die, met het oog op de fabricagekosten en de noodzaak van grote ijzeren eindplaten, niet de meest economische oplossing geven. Het is vaak belangrijker magneetringen van gestandaardiseerde afmetingen te gebruiken dan tot het uiterste te bezuinigen op ferroxdure. Toch is het nuttig de dimensies voor minimaal volume te kennen, omdat dit de mogelijkheid schept te beoordelen of de ontworpen magneetring onredelijk groot is uitgevallen.

Grafieken voor het ontwerp op minimaal volume

De grafieken waarmee de dimensies van de magneet met minimaal volume kunnen worden bepaald, zijn gereproduceerd in *fig. 3*. In alle drie de grafieken treedt de hoogte l_m van de magneetring als parameter op, terwijl horizontaal is uitgezet de zg. magnetische weerstand R_l van de luchtspleet, vermenigvuldigd met de permeabiliteit van het vacuüm μ_0 ($= 4\pi \times 10^{-7}$ H/m):

$$\mu_0 R_l = \frac{l_l}{\pi D_{gem} d} \text{ m}^{-1}. \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Hierin stellen $l_l = \frac{1}{2}(D_g - D_k)$, $D_{gem} = \frac{1}{2}(D_g + D_k)$ en d de afmetingen van de luchtspleet voor, uitgedrukt in m (zie fig. 1). Verticaal zijn in fig. 3*a*, *b* en *c* resp. uitgezet de magnetische flux Φ_l in de luchtspleet, de oppervlakte S_m van de magneetringdoorsnede loodrecht op de as, en de magnetische inductie B_m in de magneet. Wordt een bepaalde inductie gevraagd in een luchtspleet van gegeven afmetingen, dan zijn Φ_l en $\mu_0 R_l$ gegeven, b.v. $\mu_0 R_l = 3{,}5$ m^{-1} en $\Phi_l = 3{,}7 \times 10^{-4}$ Wb ($3{,}7 \times 10^4$ maxwell). Uit fig. 3*a* volgt nu: $l_m = 12$ mm; vervolgens leest men in fig. 3*b* af: $S_m = 41$ cm² en in fig. 3*c*: $B_m = 0{,}217$ Wb/m² (2170 gauss). Uit constructieve overwegingen moet de binnendiameter D_i van de ring 5 à 6 mm groter zijn dan de kerndiameter D_k. Deze laatse is, als maat

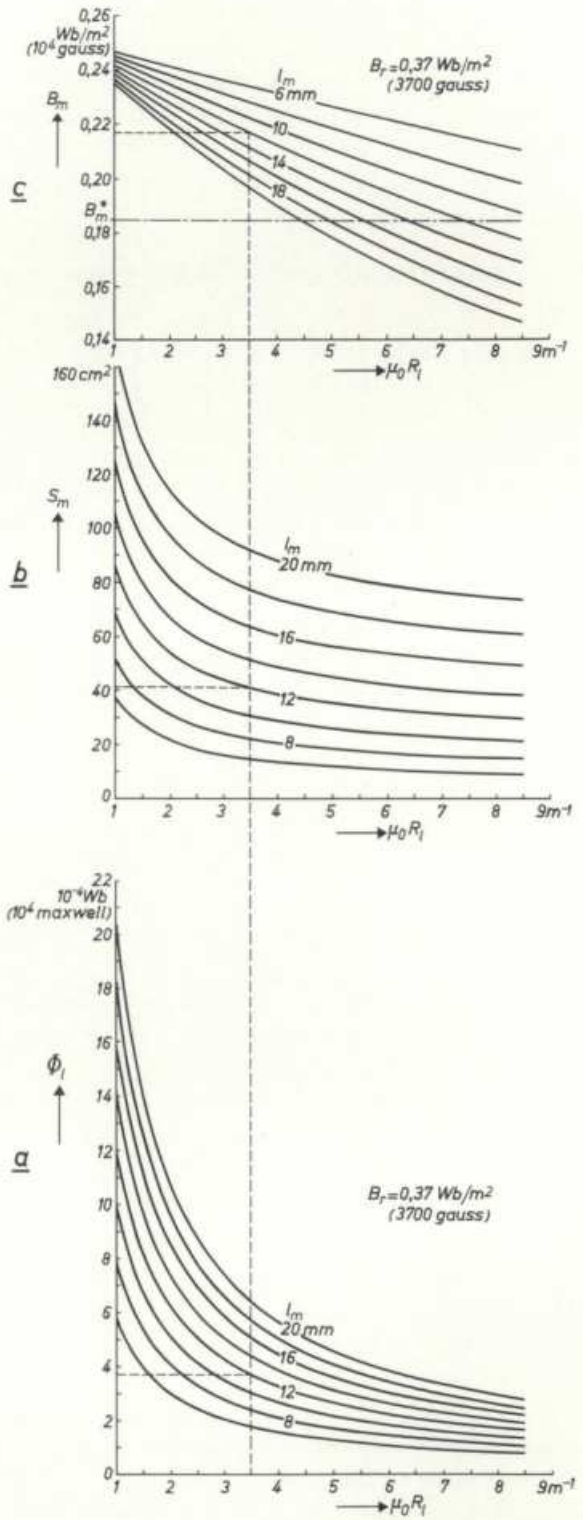


Fig. 3. Grafieken voor het ontwerpen van een magneetring van ferroxdure met minimaal volume voor een luidsprekersysteem volgens fig. 1. Het gebruik is toegelicht in de tekst. De grafieken gelden voor ferroxdure 300 R met een waarde van 0,37 Wb/m² (3700 gauss) voor de remanentie B_r. Voor een andere waarde van B_r, b.v. $B_r = 0{,}38$ Wb/m², moet men in (*a*) en (*c*) de getallen bij de verticale as met 38/37 vermenigvuldigen. B_m^* in (*c*) is de waarde van de inductie B_m in de magneet waarbij $B_m \times H_m$ maximaal is. Begint de knie in de demagnetiseringskromme (zie fig. 5) bij of beneden $\frac{1}{2}B_r$ (wat in (*c*) is aangenomen), dan geldt $B_m^* = \frac{1}{2}B_r$.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

van de ringvormige luchtspleet, gegeven. Hiermee liggen de afmetingen van de magneetring vast.

Maakt men $D_i = D_k$ veel groter dan de genoemde 5 à 6 mm, dan wordt de flux in de luchtspleet kleiner dan verlangd wordt. De constructie valt dan ook niet meer onder die welke we in dit artikel als normaal beschouwen.

De werkwijze ter berekening van luidsprekermagneten

Om toe te lichten hoe de werkwijze ter berekening van luidsprekermagneten is ontstaan, is het doelmatig uit te gaan van het in *fig. 4* geschetste vervangschema van een magnetisch circuit, zoals dit op grond van de gebruikelijke theorie van dergelijke circuits kan worden afgeleid [2]). De magneet blijkt

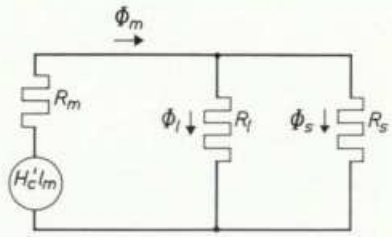


Fig. 4. Vervangschema van een (geïdealiseerd) magnetisch circuit. De magneet wordt voorgesteld door een magnetomotorische kracht ter grootte $H_c' l_m$, in serie met een inwendige weerstand R_m. De uitwendige weerstanden R_l en R_s representeren resp. de luchtspleet en de weg voor de spreidingsflux.

te kunnen worden opgevat als een bron met magnetomotorische kracht $H_c' l_m$ in serie met een inwendige weerstand R_m, waarvoor geldt:

$$R_m = \frac{l_m}{\mu_0 \mu_r S_m}. \qquad \ldots . \quad (2)$$

De betekenis van H_c' blijkt uit *fig. 5*, waarin de demagnetiseringskromme van het gebruikte anisotrope ferroxdure 300 R is getekend. De hoogte l_m en de doorsnede S_m van de magneetring worden resp. in m en m² uitgedrukt, en H_c' in A/m. De factor μ_r, die de relatieve permeabiliteit van het ferroxdure voorstelt, is gelijk aan de cotangens van de hoek die de demagnetiseringskromme maakt met de B_m-as, althans wanneer, zoals in fig. 5, B_m en $\mu_0 H_m$ op dezelfde schaal zijn uitgezet. Daar voor ferroxdure 300 R deze hoek gemiddeld 43° is, is $\mu_r = 1{,}07$. Ter vereenvoudiging stellen we in (2) $\mu_r = 1$, zodat

$$R_m = \frac{l_m}{\mu_0 S_m}. \qquad \ldots . \quad (3)$$

[2]) Zie b.v.: J. Fischer, Abriss der Dauermagnetkunde, Springer-Verlag, Berlijn 1949, blz. 103 e.v. Ook: P. Cornelius, Samenvatting der elektriciteitsleer, Philips Technische Bibliotheek, 1958, blz. 135.

Dat de door de magneet geleverde magnetomotorische kracht de waarde $H_c' l_m$ moet hebben, kan men inzien door twee extreme gevallen te beschouwen, nl. het geval van magnetische kortsluiting (geen luchtspleet) en het geval dat de weerstanden R_l en R_s oneindig groot zijn. In het eerste geval neemt, volgens het vervangschema, de flux de waarde $\Phi_m = \mu_0 \mu_r H_c' S_m = B_r S_m$ aan, wat betekent dat het werkpunt beantwoordt aan de remanentie. In het tweede geval is $\Phi_m = 0$, en dus $B_m = 0$, terwijl men met de „open spanning" $H_c' l_m$ te maken heeft, zodat de veldsterkte in de magneet de fictieve waarde H_c' aanneemt (fig. 5). Dit beantwoordt aan een werkpunt dat in H_c' valt. Het vervangschema is dan ook gebaseerd op een rechte demagnetiseringslijn die doorloopt tot het punt H_c'.

De magnetomotorische kracht veroorzaakt een magnetische flux door de parallelgeschakelde weerstanden R_l en R_s. Deze weerstanden representeren resp. de luchtspleet en de weg voor de totale spreidingsflux. Uit fig. 4 volgt voor de flux door de luchtspleet:

$$\Phi_l = \frac{H_c' \, l_m}{p \, R_l + R_m}, \qquad \ldots . \quad (4)$$

waarin formeel geldt:

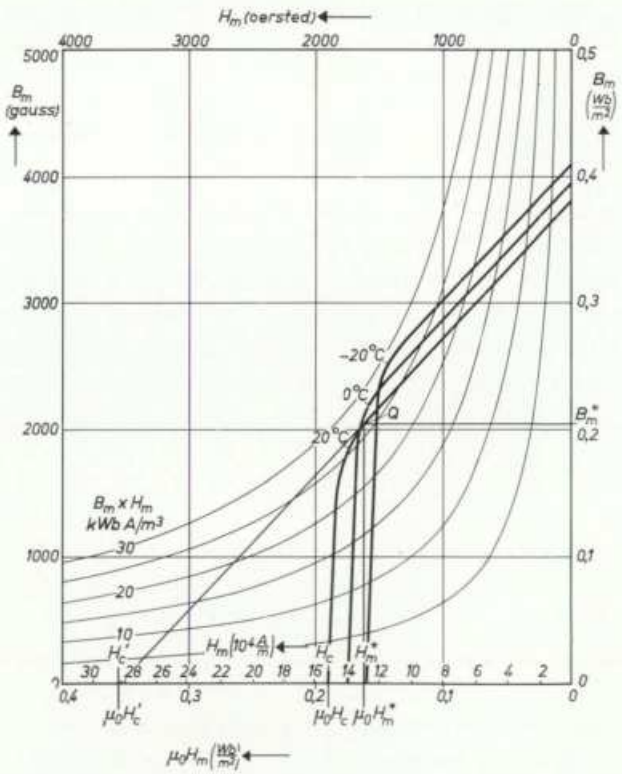


Fig. 5. De demagnetiseringskromme van een monster ferroxdure 300 R, de voor luidsprekermagneten gebruikte ferroxduresoort, bij drie temperaturen. De magnetische toestand van het materiaal wordt gekenmerkt door een punt op de demagnetiseringskromme, het zg. werkpunt. Dit punt moet boven de knie liggen. De ingetekende hyperbolen, waarop het produkt $B_m \times H_m$ constant is, maken het mogelijk voor ieder punt van de demagnetiseringskromme de bijbehorende waarde van dit produkt af te lezen. Voor de kromme geldend voor 20 °C is $B_m \times H_m$ maximaal, nl. ca. 26,5 kWbA/m³ (ca. $3{,}35 \times 10^6$ gauss-oersted), als $B_m = B_m^*$ (ruim 0,2 Wb/m²).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

$$p = 1 + \frac{R_m}{R_s}, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

en voor de flux Φ_m door de magneet:

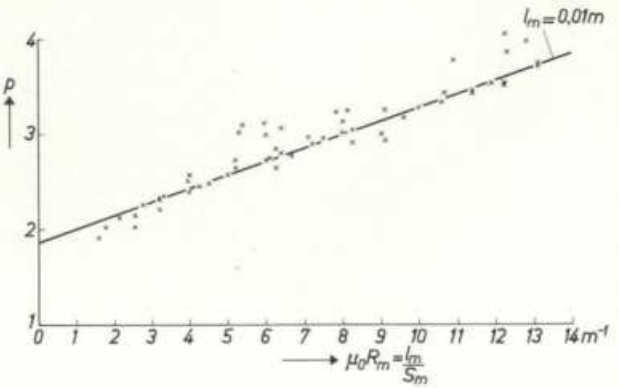
$$\Phi_m = \frac{H_c' l_m}{\frac{R_l}{p'} + R_m}, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

waarin formeel geldt:

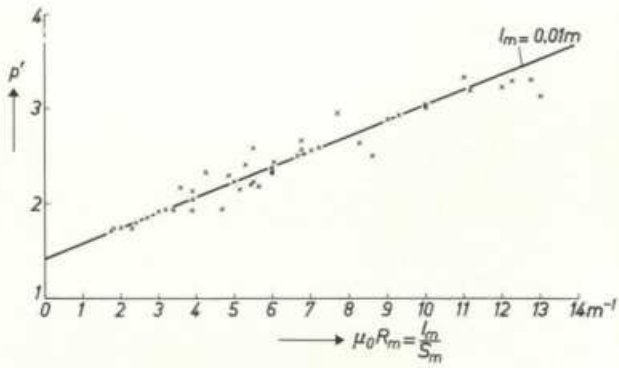
$$p' = 1 + \frac{R_l}{R_s}. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Voor de weerstand R_l van de luchtspleet maakt men gebruik van de uitdrukking (1), maar voor de spreidingsweerstand R_s kan men geen eenvoudige uitdrukking opschrijven. Daardoor reeds zijn de formules niet zonder meer bruikbaar voor berekeningen. Maar bovendien liggen aan het gebruik van een vervangschema volgens fig. 4 een aantal vereenvoudigende onderstellingen ten grondslag die zeker onjuist zijn. De belangrijkste is wel de onderstelling dat overal in de magneet de veldsterkte H_m en de inductie B_m homogeen zijn en evenwijdig met de as van de magneet. In dat geval is de gebruikelijke karakterisering van de magnetische toestand van de magneet door een enkel „werkpunt" op de demagnetiseringskromme (fig. 5) inderdaad mogelijk. Men onderstelt dan tevens dat de flux Φ_m door de magneet in iedere doorsnede dezelfde waarde heeft. Bij ferroxdure-ringen in luidsprekersystemen hebben wij echter in een bepaald geval gemeten dat de flux door de magneet van de voet naar de top 20% afnam: de velden in de magneet zijn dus in het algemeen niet homogeen. Dit is ook geconstateerd door Schwabe, die in een systeem volgens fig. 1 het verloop van de veldsterkte H_m experimenteel heeft bepaald [3]). Karakterisering van de gehele magneet door één punt van de demagnetiseringskromme is dan ook eigenlijk onmogelijk [4]). De relatie $H_m l_m = H_l l_l$ (H_l is de magnetische veldsterkte in de luchtspleet), die zou moeten gelden, daar beide uitdrukkingen de magnetische spanning tussen de poolschoenen voorstellen, blijkt evenmin op te gaan. $H_m l_m$ is 10 tot 35% groter dan $H_l l_l$, welk verschil veel te groot is om verklaard te worden door de magnetische weerstand van het ijzer. Het is niet verwonderlijk dat een zo vereenvoudigde theorie geen goede basis is voor berekeningen die op enige nauwkeurigheid aanspraak moeten maken.

Met het doel, langs experimentele weg te onderzoeken of het mogelijk was de formules (4) tot (7) zodanig te wijzigen dat zij voor berekeningen bruikbaar zouden worden, hebben wij metingen van de fluxen Φ_l en Φ_m in luchtspleet en magneet aan tientallen verschillend gedimensioneerde luidsprekersystemen volgens fig. 1 verzameld, en deze bovendien uitgebreid met speciaal voor dit doel uitgevoerde metingen. We hebben de uitkomsten eerst herleid tot een waarde van 0,37 Wb/m² voor de remanentie B_r bij 20 °C. Hierbij gebruikten we de voor de remanentie van ferroxdure geldende temperatuurcoëfficiënt van $-0{,}2\%$ per °C, en namen aan dat Φ_l en Φ_m evenredig zijn met B_r. Daarna berekenden we voor alle systemen p en p' met de formules (4) en (6). De formules (5) en (7) voor p en p' lieten we geheel buiten beschouwing. Toen we vervolgens p uitzetten als functie van de magnetische weerstand R_m van de magneet, bleken punten behorende bij een zelfde waarde van de magneethoogte l_m ongeveer op een rechte lijn te liggen. Een bevestiging van het vermoeden dat dit geen toeval was, hebben we verkregen door alle metingen tot dezelfde waarde van l_m



a



b

Fig. 6. Puntenzwermen, verkregen door de uit metingen aan luidsprekersystemen afgeleide waarden van p en p' uit te zetten als functie van $\mu_0 R_m$, na herleiding van alle metingen tot dezelfde hoogte $l_m = 0{,}01$ m van de magneetring. *a*) Puntenzwerm voor p, *b*) voor p'.

[3]) E. Schwabe, Über die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Eigenschaften von Bariumferrit, Z. angew. Physik **9**, 183-187, 1957, speciaal blz. 186.

[4]) In de meeste punten van een magneet zullen B_m en H_m niet precies evenwijdig zijn. Om de magnetische toestand in een bepaald punt vast te leggen, zou men de componenten van de vectoren B_m en H_m moeten opgeven. Zelfs voor een enkel punt in de magneet is derhalve de karakterisering van de magnetische toestand door een punt in het B_m-H_m-vlak slechts een benadering.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

te herleiden (*fig. 6a*; voor het gemak is hierin $\mu_0 R_m$ uitgezet in plaats van R_m). Dit is mogelijk door gebruik te maken van de eigenschap dat gelijkvormige vergroting van een systeem geen invloed heeft op de inducties op overeenkomstige plaatsen. Hieruit volgt dat de voor p en p' berekende waarden onafhankelijk zijn van een gelijkvormige vergroting. Immers, als een systeem lineair een factor a wordt vergroot, worden Φ_l en Φ_m vermenigvuldigd met a^2, l_m met a en R_l en R_m met $1/a$. Uit (4) en (6) volgt dan dat p en p' niet veranderen. Om een punt dat geldt voor een bepaald systeem te transformeren tot een punt voor een gelijkvormig systeem, dat lineair een factor a groter is (en waarbij R_m dus een factor a kleiner is), behoeft men derhalve de abscis R_m van dit punt slechts door a te delen (*fig. 7*). De in fig. 6*a* voor p getekende punten zijn verkregen na herleiding tot $l_m = 10$ mm. Benadering van deze puntenzwerm door een rechte lijn blijkt bevredigend als grondslag voor praktische berekeningen.

Uit bovengenoemde transformatieregel volgt nog dat de vergelijking van de rechte de vorm moet hebben (zie fig. 7):

$$p = b\, l_m\, R_m + c\,.$$

Hierin stellen b en c constanten voor.

Voor p' geldt, mutatis mutandis, hetzelfde als voor p (fig. 6*b*). We hebben voor p en p' de volgende uitdrukkingen gevonden:

$$p = 14{,}2\mu_0 R_m l_m + 1{,}86 = 14{,}2\frac{l_m^2}{S_m} + 1{,}86, \quad (8)$$

$$p' = 16{,}2\mu_0 R_m l_m + 1{,}42 = 16{,}2\frac{l_m^2}{S_m} + 1{,}42. \quad (9)$$

p en p' zijn de op blz. 144 aangekondigde coëfficiënten. Men ziet dat men ze inderdaad rechtstreeks kan berekenen uit de afmetingen van het systeem. Heeft men dit gedaan, dan volgen uit (4) en (6) de fluxen Φ_l en Φ_m in luchtspleet en magneet. Deling van Φ_l door de luchtspleetoppervlakte $\pi d D_{gem}$ en van Φ_m door de doorsnede S_m van de magneetring levert de inducties B_l in de luchtspleet en B_m in de magneet.

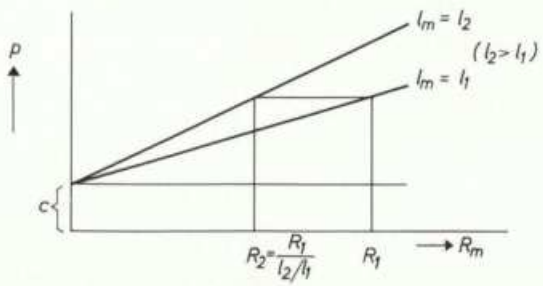


Fig. 7. Om de rechte voor $l_m = l_2$ af te leiden uit de rechte voor $l_m = l_1 (l_1$ en l_2 zijn constanten), moet men alle R_m-waarden door $a = l_2/l_1$ delen. Het stuk c dat de rechten van de p-as afsnijden, hangt dus niet af van l_m, terwijl de helling evenredig is met l_m. De vergelijkingen der rechten hebben derhalve de vorm $p = bl_mR_m + c$, met constante waarden van b en c.

Daar, zoals op blz. 147 is betoogd, de flux door de magneet niet in iedere doorsnede dezelfde waarde heeft, moet men afspreken in welke doorsnede men de flux Φ_m zal meten. Wij hebben dit steeds ter halver hoogte van de magneetring gedaan. B_m is berekend door de aldus gemeten flux te delen door S_m.

Ook voor de flux Φ_l in de luchtspleet moet men omtrent de meting een afspraak maken, daar het veld in de luchtspleet niet exact homogeen is. Wij hebben steeds ballistisch gemeten met een spoel met hoogte $h = \frac{2}{3}d$ (zie *fig. 8*; d is de dikte van

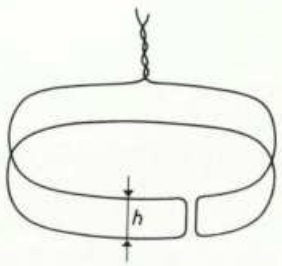


Fig. 8. Vorm van de spoel waarmee de flux in de luchtspleet wordt gemeten. Voor de hoogte h geldt $h = \frac{2}{3}d$, waarin d de dikte van de bovenplaat voorstelt (zie fig. 1).

de poolplaat, zie fig. 1). Deze spoel wordt symmetrisch in de luchtspleet opgesteld en hier vervolgens uit weggetrokken. Deling van de aldus gemeten flux door de oppervlakte van de spoel levert B_l, en door deze inductie te vermenigvuldigen met $\pi d D_{gem}$, vindt men Φ_l.

Om betrouwbare metingen te krijgen, is het nodig gebleken kern en onderplaat (fig. 1) uit één stuk te maken en erop toe te zien dat de bovenvlakken van kern en bovenplaat nauwkeurig samenvallen. Bovendien moet men nagaan of nergens in het weekijzer de inductie hoger wordt dan ca. 12 000 gauss, omdat anders de magnetische weerstand van het ijzer een rol gaat spelen.

Bij vergelijking met metingen die elders, dikwijls onder enigszins andere omstandigheden zijn verricht, moet men voorzichtigheid betrachten. Zo bepaalt men ook wel de flux Φ_l in de luchtspleet met een spoel waarvan de hoogte precies gelijk is aan die van de spleet ($h = d$). Men vindt dan een waarde van B_l die een paar procent kleiner is dan de onze.

Aan het in fig. 4 geschetste vervangschema voor een magnetisch circuit ligt o.a. de onderstelling ten grondslag dat het „werkpunt" van de ferroxduremagneet in het H_m-B_m-vlak (fig. 5) bij variatie van H_m beweegt langs een rechte lijn die de H_m-as snijdt in het punt H_c', en de B_m-as in het punt B_r, dat de remanentie van het materiaal voorstelt [2]). Het werkpunt beweegt in feite echter langs de dik getekende lijn, die slechts tot de knie, in het punt Q, met de genoemde rechte samenvalt, en die de H_m-as snijdt in het punt H_c, de zg. coërcitie. Wanneer de berekening van B_m tot een waarde leidt die beantwoordt aan een punt van het gedeelte $H_c'Q$ van deze rechte, berekent men op de geschetste wijze te hoge waarden

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

van Φ_l en Φ_m. Men kan dan ook niet volstaan met de berekening van de inductie B_l in de luchtspleet; het is noodzakelijk ook B_m te bepalen ten einde te kunnen controleren of het werkpunt boven de knie ligt.

Het is zelfs ongewenst dat het werkpunt erg dicht boven de knie ligt. Ten eerste is, zoals reeds is uiteengezet, het gevonden werkpunt slechts een gemiddelde voor de gehele magneet. Er zullen hierin zeker gebieden voorkomen waar het werkpunt beneden het gemiddelde ligt. Ten tweede is een magneet waarvan het werkpunt dicht bij de knie ligt, magnetisch niet erg stabiel: bij storingen door een uitwendig veld bestaat het gevaar dat het werkpunt daalt tot in de ronding van de knie, of daar beneden. Dit leidt tot blijvende verzwakking van de magneet [5]). Het gevaar is natuurlijk het grootst voor de gebieden in de magneet waar het werkpunt beneden het gemiddelde ligt. Ten derde verschuift de demagnetiseringskromme bij temperatuurverandering (fig. 5). Ligt het werkpunt dicht boven de knie, dan kan het bij daling van de temperatuur hier beneden komen, waarvan blijvende verzwakking van de magneet het gevolg is [6]).

Berekening op minimaal magneetvolume

Om het minimaal vereiste magneetvolume te vinden, beginnen we met de afleiding van een algemene uitdrukking voor het magneetvolume. Door invulling van $R_m = \dfrac{l_m}{\mu_0 S_m}$ (3) in de uitdrukking (4) voor de luchtspleetflux Φ_l krijgen we:

$$\Phi_l = \frac{\mu_0 H_c' l_m}{p\,\mu_0 R_l + \dfrac{l_m}{S_m}}.$$

De afmetingen van de luchtspleet en de hierin verlangde inductie onderstellen we bekend. $\mu_0 R_l$ (zie (1)) en Φ_l zijn derhalve gegeven grootheden, evenals de materiaalconstante $\mu_0 H_c'$. Na invulling van de uitdrukking (8) voor p in bovenstaande formule voor Φ_l lossen we S_m op en vinden:

$$S_m = \frac{\Phi_l(14{,}2\,\mu_0 R_l l_m^2 + l_m)}{\mu_0 H_c' l_m - 1{,}86\,\Phi_l \mu_0 R_l}. \quad . \quad (10)$$

Hierdoor is de oppervlakte S_m van de magneetring uitgedrukt in de hoogte l_m van deze ring; de overige grootheden zijn alle bekend. Vermenigvuldiging met l_m levert de gezochte uitdrukking voor het magneetvolume V_m:

$$V_m = l_m S_m = \frac{\Phi_l(14{,}2\,\mu_0 R_l l_m^3 + l_m^2)}{\mu_0 H_c' l_m - 1{,}86\,\Phi_l \mu_0 R_l}. \quad . \quad (11)$$

Onderzocht moet worden of V_m als functie van l_m een minimum vertoont en voor welke waarde van l_m dit minimum zich voordoet. Hiertoe differentieert men V_m naar l_m en stelt de uitkomst nul. Het resultaat is de volgende vierkantsvergelijking voor l_m:

$$28{,}4\,\mu_0 H_c' l_m^2 + \left(\frac{\mu_0 H_c'}{\mu_0 R_l} - 79{,}2\,\Phi_l \mu_0 R_l\right) l_m - 3{,}72\,\Phi_l = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Vergelijking (12) bezit altijd slechts één positieve wortel l_m, en deze blijkt te corresponderen met een minimale waarde van V_m. Door uit (12) l_m op te lossen en vervolgens met (10) S_m te berekenen, kan men de dimensies van de magneetring met minimaal volume vinden.

Om de in fig. 3 gereproduceerde grafieken te berekenen, is op enigszins andere wijze te werk gegaan. Uit (12) is niet l_m opgelost, maar Φ_l. Het resultaat is:

$$\Phi_l = \frac{28{,}4\,\mu_0 H_c' l_m^2 + (\mu_0 H_c'/\mu_0 R_l) l_m}{79{,}2\,\mu_0 R_l l_m + 3{,}72}. \quad (13)$$

Voor een aangenomen stel waarden van l_m en $\mu_0 R_l$ kan men uit (13) Φ_l berekenen. Gebruik makend van dit resultaat, kan men dan uit (10) ook S_m berekenen. Dan kan p' worden berekend met (9) en vervolgens Φ_m met (6), waarna deling door S_m ten slotte B_m oplevert — alles bij de aangenomen waarden van l_m en R_l. Door deze berekening van Φ_l, S_m en B_m bij een vaste waarde van l_m uit te voeren voor een serie waarden van $\mu_0 R_l$, en deze gehele rekenprocedure te herhalen voor een aantal waarden van l_m, vindt men de krommenscharen in fig. 3*a*, *b* en *c*.

De berekening is op een rekenmachine van het type IBM 650 uitgevoerd voor waarden van l_m die met stapjes van 10^{-3} m opliepen van 6×10^{-3} tot 24×10^{-3} m, terwijl bij elk dezer waarden van l_m de grootheid $\mu_0 R_l$ met stapjes van 0,5 m^{-1} opliep van 1 tot 9 m^{-1}. Voor B_r is gekozen 0,37 Wb/m², zodat voor $\mu_0 H_c'$ ingevuld moest worden: 0,37 tg43° Wb/m² (zie fig. 5).

Daar de berekening bestaat uit een simpele opeenvolging van de elementaire bewerkingen: vermenigvuldigen, optellen, delen en aftrekken, kon deze rechtstreeks worden geprogrammeerd en door de machine worden uitgevoerd. De waarde van 0,37 Wb/m² voor B_r is gekozen omdat dit de minimumwaarde is voor ferroxdure 300 R. De werkelijke waarde zal echter vrijwel altijd groter

---

[5]) Zie b.v. het in noot [1]) genoemde boek van G. Hennig, blz. 19 e.v.

[6]) F. Tomholt en E. Haes, Temperature dependence of the magnetic properties of ferroxdure 2, Philips Matronics no. 13, 225-228, december 1957; zie ook het in noot [3]) genoemde artikel van E. Schwabe.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

zijn, b.v. 0,38 Wb/m². In dat geval is $\mu_0 H_c'$ evenredig groter. Als men de geschetste gang van de berekening van Φ_l, S_m en B_m bij aangenomen waarden van l_m en $\mu_0 R_l$ nagaat, ziet men gemakkelijk dat S_m onafhankelijk is van B_r, terwijl Φ_l en B_m er recht evenredig mee zijn. Is dus $B_r = 0{,}38$ in plaats van 0,37 Wb/m², dan behoeft men slechts de getallen bij de verticale as in fig. 3*a* en *c* met 38/37 te vermenigvuldigen om de grafieken bij dit geval aan te passen.

Uit fig. 3*c* blijkt dat de waarde van B_m die geldt voor een op minimaal volume berekende magneet, gewoonlijk niet samenvalt met de waarde $B_m{}^*$ waarvoor het produkt $B_m \times H_m$ maximaal is. Meestal is deze waarde groter dan $B_m{}^*$.

De grafieken van fig. 3 zijn gebaseerd op een rechte demagnetiseringslijn die doorloopt tot de H_m-as. Dan geldt: $B_m{}^* = \frac{1}{2} B_r$. In fig. 3*c* is daarom $B_m{}^* = 0{,}185$ Wb/m² gekozen. Dikwijls ligt het punt Q waar de knie begint, hoger dan $\frac{1}{2} B_r$ (dit is b.v. het geval in het voorbeeld van fig. 5). $B_m{}^*$ valt dan samen met de waarde van B_m die beantwoordt aan Q en is dus iets groter dan $\frac{1}{2} B_r$.

Bekijkt men de in fig. 3 verzamelde resultaten, dan valt achteraf op dat, gezien de eenvoudige vorm der verkregen krommen, met de berekening van een veel geringer aantal punten volstaan had kunnen worden. De vorm was echter van te voren niet bekend en wij hebben deze niet van te voren geschat. Daar de machine het slavenwerk verricht, hoeft men ook niet op een punt meer of minder te kijken. Dat van de enorme hoeveelheid gegevens die een rekenmachine levert, slechts een klein gedeelte wordt gebruikt, is bij fysische en technische problemen een normaal verschijnsel.

Samenvatting. Bespreking van een werkwijze ter berekening van magnetische systemen voor luidsprekers, uitgerust met een ringmagneet van ferroxdure. Spreiding en andere theoretisch moeilijk toegankelijke factoren, zoals inhomogeniteit van de inductie in de magneet, worden in rekening gebracht door een tweetal coëfficiënten, die met experimenteel gevonden formules uit de dimensies van de magneet kunnen worden bepaald. Van een normaal systeem met gegeven afmetingen kan men met behulp van deze coëfficiënten de inductie in de luchtspleet met een nauwkeurigheid van $\pm 3\%$ berekenen. Er zijn tevens formules afgeleid voor de berekening van de ringmagneet die bij minimaal volume een voorgeschreven inductie levert in een gegeven luchtspleet. Deze formules zijn verwerkt tot een drietal grafieken waarin men de afmetingen, en tevens de bijbehorende inductie B_m in de magneet, kan aflezen. B_m blijkt meestal groter te zijn dan de waarde die beantwoordt aan $(BH)_{max}$. De berekening van de grafieken is in Philips' Rekencentrum verricht met behulp van een elektronische rekenmachine van het type IBM 650.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

HET OPLOSSEN VAN EEN LEGPUZZEL MET DE PASCAL

door A. J. DEKKERS *) en A. J. W. DUIJVESTIJN *).

681.14-523.8:685.854

Inleiding

De voorafgaande artikelen in dit nummer illustreren het gebruik van de elektronische rekenmachine voor diverse wiskundige problemen, zoals het uitwerken van aritmetische formules, het oplossen van vergelijkingen, het integreren van differentiaalvergelijkingen, enz. Dat de rekenmachine bij al deze problemen moet rekenen, lijkt vanzelfsprekend, maar is het toch niet: de rekenmachine kan ook gebruikt worden voor niet-rekenkundige taken, of althans taken die in eerste aanleg niets met rekenen te maken hebben. We denken daarbij aan verschillende gebieden van de wiskunde zelf, zoals de topologie, de abstracte algebra (groepentheorie), enz., voorts aan „logische" problemen en aan werkzaamheden als sorteren en combineren, die men veelvuldig buiten het gebied van de wiskunde tegenkomt, met name in de administratie van bedrijven. In de organisatie van Philips' Rekencentrum komt dit tot uitdrukking doordat hier twee vrijwel identieke rekenmachines opgesteld zijn — de PASCAL en de STEVIN —, waarvan de ene voor het eigenlijke wiskundige werk bestemd is terwijl de andere vrijwel uitsluitend ten dienste staat van diverse administratieve afdelingen van het Philipsconcern [1]).

Het onderscheid tussen rekenkundige en niet-rekenkundige problemen is bij een strenge ontleding van de begrippen misschien niet te handhaven. Deze vraag heeft de geleerden reeds beziggehouden lang voordat er rekenmachines bestonden: men heeft toen zowel de stelling verdedigd dat logisch redeneren niets anders is dan een soort rekenen, als de stelling dat rekenen niets anders is dan een soort logisch redeneren. Gaat men na, wat voor handelingen men de rekenmachine bij het oplossen van allerlei vraagstukken laat uitvoeren, dan kan men eveneens tot de conclusie komen dat het genoemde onderscheid slechts oppervlakkig is. Immers, bij problemen die voor het normale spraakgebruik niet rekenkundig heten, zal men in het opdrachtenprogramma misschien niet het optellen aantreffen, dat een der grondhandelingen van de machine voor alle wiskundige bewerkingen is, maar er zal toch steevast en wellicht zelfs herhaaldelijk de handeling van het tellen in voorkomen. De diep gefundeerde verwantschap tussen de beide handelingen komt al in onze taal tot uitdrukking.

Voor het doorzien van alle mogelijkheden van de rekenmachine kan het zijn nut hebben, te trachten, zeer uiteenlopende en ook — weer voor het normale spraakgebruik — volstrekt niet-rekenkundige problemen voor de rekenmachine te programmeren. Zo wordt thans in het Studiecentrum voor Administratieve Automatisering te Amsterdam, onder leiding van Dr. M. Euwe, in opdracht van Euratom een programma ontworpen waarmee de rekenmachine een partij schaak zal kunnen spelen. Wijzelf hebben een eenvoudiger probleem als studieobject gekozen, nl. een legpuzzel. Hiervoor is een oplosprocédé uitgewerkt en voor de PASCAL geprogrammeerd. Het oplosprocédé zullen we hier bespreken.

Beschrijving van de puzzel

De gekozen puzzel is als volgt te beschrijven [2]). Een schaakbord is door een aantal rechte sneden verdeeld in 12 stukken, die in *fig. 1* zijn afgebeeld.

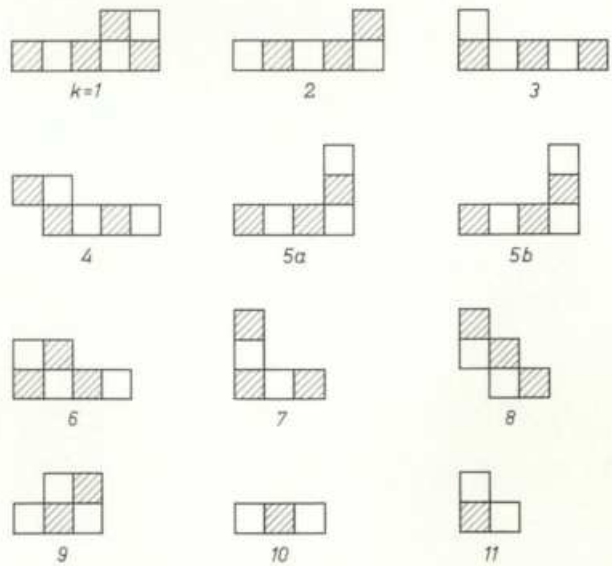


Fig. 1. De 12 stukken waarin bij de beschouwde puzzel het schaakbord is verdeeld. Er zijn 11 verschillende vormen, één vorm (no. 5) komt dubbel voor.

*) Philips' Rekencentrum, Eindhoven.

[1]) Zie: W. Nijenhuis, De PASCAL, een zeer snelle digitale elektronische rekenmachine voor Philips' Rekencentrum, Philips techn. T. **23**, 1-19, 1961 (no. 1).

[2]) De puzzel behoort tot een serie die door de firma Cecil Coleman Ltd. in de handel wordt gebracht. Hij staat hier bekend als „Perzische puzzel".

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

De stukken no. 5a en 5b zijn (toevallig) identiek, alle andere stukken zijn hiervan en onderling verschillend. Gevraagd wordt, uit deze 12 stukken het schaakbord weer samen te stellen, met de juiste afwisseling van witte en zwarte velden. Bestaat er meer dan één oplossing? Geef dan alle mogelijke oplossingen.

De oplossing kan alleen maar worden gevonden door proberen, doch het aantal mogelijkheden dat we daarbij moeten onderzoeken, is enorm. Het is daarom in de eerste plaats nodig, een dusdanig systematische procedure voor het proberen te bedenken dat we zeker zijn alle mogelijkheden tegen te komen. In de tweede plaats is er weinig hoop, zonder elektronische rekenmachine de volledige oplossing van de puzzel te vinden: nader zal blijken dat er *elf* verschillende oplossingen zijn, waarvoor ongeveer 3 miljoen mogelijkheden moeten worden nagegaan.

De oplosmethode

Het reeds genoemde systematiseren van het proberen komt hierop neer dat we de 64 velden van een leeg schaakbord in een vaste volgorde trachten te bedekken, en daartoe de gegeven 12 stukken, elk in de verschillende mogelijke standen gedraaid, in een vaste volgorde trachten neer te leggen.

Essentieel is hierbij dat een complete administratie wordt bijgehouden van reeds bedekte velden en van reeds gebruikte en geprobeerde stukken en standen. Immers, bij het neerleggen van elk stuk (elke neerlegbeurt) moet er onderzocht worden, of we niet in conflict komen met de eisen, b.v. of door het stuk geen enkel reeds eerder bezet veld opnieuw wordt bedekt. Komen we tot de conclusie dat géén der overgebleven stukken het aan de beurt zijnde open veld kan bedekken zonder ergens in conflict te komen, dan moet het in de vorige beurt neergelegde stuk worden teruggenomen, en we moeten (in de voorgeschreven volgorde) hetzelfde stuk in de volgende stand, of het hierop volgende stuk, proberen. Lopen we met alle nog beschikbare stukken vast, dan moet ook de vóórvorige beurt worden herzien, enz. Alle gegevens omtrent alle uitgevoerde neerlegbeurten moeten dus bewaard blijven.

Hiertoe wordt uiteraard gebruik gemaakt van het omvangrijke geheugen van de PASCAL.

We bespreken nu eerst het systematiseren, geven een voorbeeld hoe het systematisch proberen dan verloopt, beschrijven vervolgens hoe het „proberen" van een stuk door de machine wordt gerealiseerd en hoe de administratie wordt gevoerd, en beschouwen ten slotte het oplosproces in zijn geheel.

Het systematiseren

Systematiseren betekent, de mogelijkheden rangschikken volgens de rij der gehele getallen, zodat het „afroepen" van de mogelijkheden eenvoudig kan gebeuren door telkens een adresnummer in een geheugen met 1 te verhogen.

De eerste stap hiertoe is, dat we de te bezetten velden van het schaakbord volgnummers n geven. We noemen het veld in de hoek rechts onder $n = 1$, en voor onze behandeling van het probleem hebben we, geheel willekeurig, bepaald dat dit een zwart vakje zal moeten zijn. (De schakers onder onze lezers mogen ons dit vergeven.) De nummers n klimmen op de onderste rij van rechts naar links op, dan op de tweede rij weer rechts beginnend naar links, enz.

De volgende stap hebben we al in fig. 1 gezien: de 11 verschillende stukken zijn daar genummerd met $k = 1, 2, \ldots, 11$. (De complicatie dat stuk no. 5 tweemaal voorkomt, wordt straks op eenvoudige wijze opgevangen.)

Ieder stuk kan in principe in vier verschillende standen op het bord worden gelegd, die telkens 90° gedraaid zijn. Alle zo verkregen mogelijkheden plaatsen we weer in een rij en geven ze volgnummers j. Elk dezer mogelijkheden noemen we een „legsel" — naar analogie met probeersel, omdat we aldus een stuk in bepaalde stand proberenderwijs neerleggen.

De rij der beschikbare legsels is in *fig. 2* afgebeeld. Men ziet hierin dat we in werkelijkheid twee rijen legsels onderscheiden, de „zwarte" en de „witte", naar gelang van de kleur van het meest rechtse vakje op de onderste rij ervan, het „grondvakje". Elk legsel wordt nl. zo gehanteerd dat *dit* vakje gelegd wordt op het aan de beurt zijnde lege veld van het bord, het „legveld". Is dat veld wit, dan moet de machine een „wit" legsel proberen; is het legveld zwart, dan een „zwart" legsel. Verder zal men zien dat van het stuk no. 1 (fig. 1) slechts twee van de vier mogelijke standen in de rij zijn opgenomen (legsels zwart 1 en wit 1). Door deze maatregel wordt, zonder verlies van volledigheid, vermeden dat, na een oplossing van de puzzel, in het verdere verloop van het oplosproces ook nog de, triviale, 180° gedraaide vorm van die oplossing opgezocht wordt. Ook stuk no. 10 (fig. 1) treedt in de rij der legsels slechts twee maal op, maar dat komt eenvoudig doordat hiervan slechts twee onderscheidbare standen mogelijk zijn (legsels wit 17 en wit 18). In totaal zijn er nu 19 zwarte en 21 witte legsels, die men moet proberen in volgorde van hun nummer, resp. j_z en j_w.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

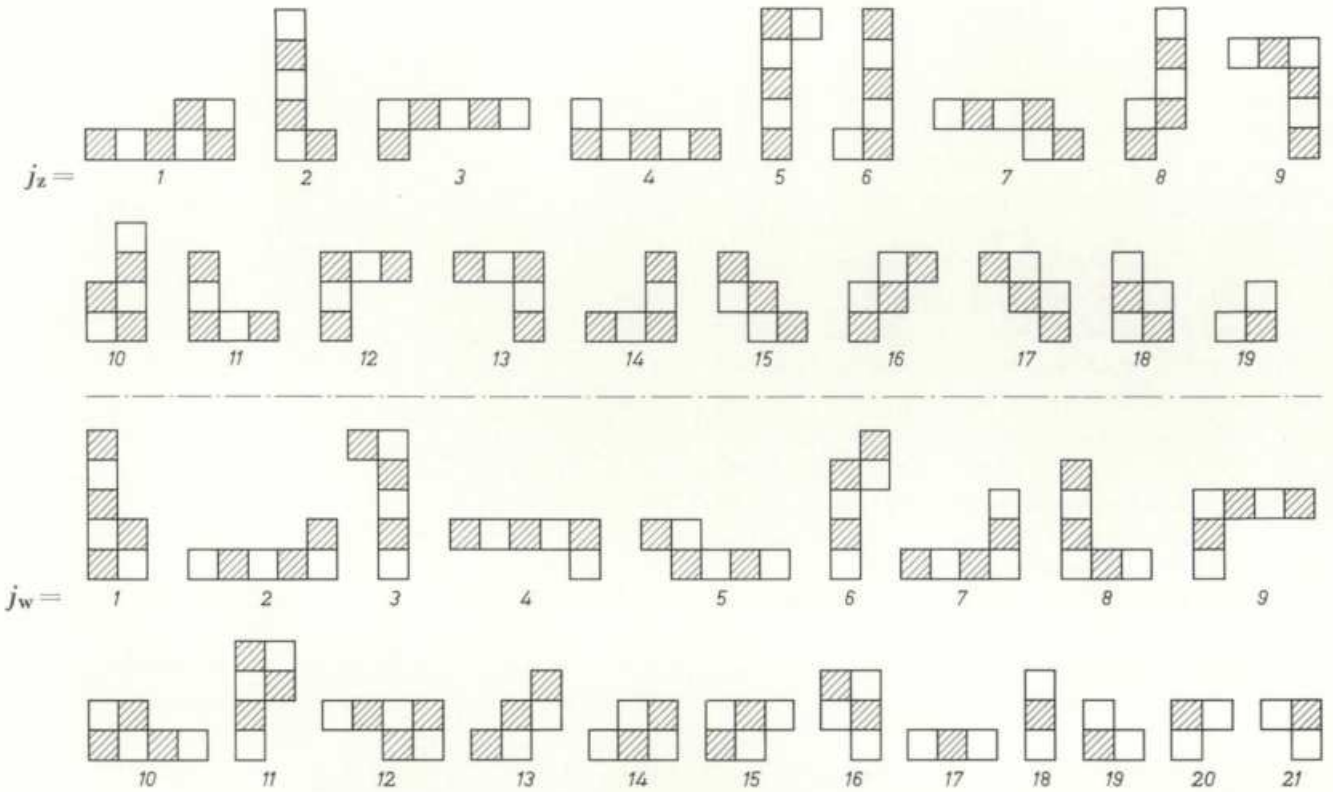


Fig. 2. De complete rij der „zwarte" en „witte" „legsels" (stukken in bepaalde stand), die bij een neerlegbeurt achtereenvolgens moeten worden geprobeerd.

Voorbeeld van een oplossingspoging

Ter illustratie van het systematisch proberen is in *fig. 3* een situatie getekend die aan het begin van het gehele oplosproces na een klein aantal stappen zich voordoet. Men heeft legsel $j_z = 1$ (stuk $k = 1$) op het eerste legveld, $n = 1$, geplaatst. Vervolgens legsel $j_w = 3$ (stuk $k = 2$) op het volgende (witte) legveld, $n = 6$. Hierna blijkt op het volgende (zwarte) legveld, $n = 7$, niet het eerstvolgende beschikbare legsel $j_z = 4$ te kunnen worden geplaatst, daar dit buiten het bord zou uitsteken. Ook $j_z = 5, 6, 7, 8$ en 9 gaan niet, doch pas $j_z = 10$ (stuk $k = 6$). Het eerstvolgende legveld vindt men op de tweede rij, het is wit. Hierop past niet legsel $j_w = 4$, en evenmin $j_w = 5$, doch wel $j_w = 6$ (stuk $k = 4$). Met legsel $j_z = 5$ ($k = 3$) op het volgende legveld en daarna $j_w = 18$ ($k = 10$) is de tweede veldenrij van het bord vol. Op het eerste legveld van de derde rij wordt nu nog legsel $j_z = 19$ (stuk $k = 11$) geplaatst, maar dan lopen we vast (situatie in fig. 3): voor het eerstvolgende legveld, het laatste veld op de derde rij, is geen enkel passend legsel meer beschikbaar.

Wat er dan verder moet gebeuren, hebben we reeds aangestipt. Stuk no. 11 moet teruggelegd worden bij de voorraad (en de machine moet daarbij alle bijbehorende stappen in de administratie, die we straks zullen bespreken, herstellen). Men is dan weer in de situatie om het vorige legveld te bezetten, en men moet daar het legsel j_z proberen dat volgt op $j_z = 19$. Zulk een legsel is er echter niet, dus men moet ook de voorafgaande stap annuleren, enz.

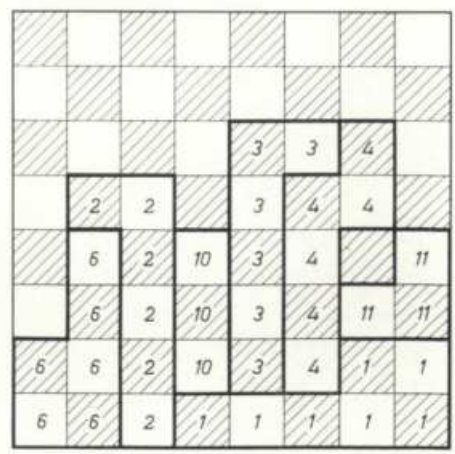


Fig. 3. Belegging van het schaakbord die ontstaan is als men volgens het beschreven systeem de eerste acht neerlegbeurten heeft uitgevoerd. Op elk belegd veld is het nummer k van het stuk geschreven waarvan het een vakje geworden is. In de getekende toestand is men vastgelopen en moet men het laatste en zelfs het voorlaatste stuk terugnemen, om met proberen verder te kunnen gaan.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

Realisering van het „proberen" door de machine; de administratie

In het zojuist besproken voorbeeld hebben we ons een menselijke operateur voorgesteld („men"), die kan controleren of een bepaald, volgens systeem afgeroepen legsel mag worden neergelegd of niet. De criteria zijn 1) dat geen reeds bezet veld opnieuw belegd mag worden en 2) dat geen vakje van het legsel buiten het bord mag vallen.

Hoe kan de rekenmachine deze controle uitvoeren? De controle gaat hand in hand met de administratie, en we zullen dus een gedeelte van de laatste al mee moeten beschrijven.

Aan elk veld van het bord wordt een plaats in het geheugen van de machine toegewezen, met adresnummer n. Alle lege velden krijgen op hun adres een (willekeurig gekozen) negatief getal, nl. —1. Wordt een veld belegd, dan wordt dit getal vervangen door een positief getal, en wel het volgnummer (k) van het beleggende stuk. De veranderingen in deze „veldinhouden", $V(n)$, houdt de machine tijdens het opereren voortdurend bij, dit deel van het geheugen vormt als het ware een werklijst.

Het beleggen van een veld is alleen toelaatbaar als er —1 op zijn adres staat. Dit kan de machine direct toetsen, ze hanteert daarmee het eerste criterium.

Het tweede criterium was, dat een stuk niet buiten het bord mag uitsteken. Opdat de machine dit kan toetsen, voegen we langs drie randen van het bord een rij fictieve velden toe (aan de onderste rand is het, in verband met het beschreven systeem van leggen, niet nodig). Deze velden krijgen ook geheugenplaatsen, en hierin plaatsen we van meet af aan een willekeurig positief getal, b.v. +20. De machine keurt dan automatisch elk legsel af dat zo'n veld gaat bedekken.

Langs de linkerrand van het schaakbord hebben we niet één maar zelfs twee rijen fictieve velden aangebracht. Hierdoor kan de machine bijzonder gemakkelijk nagaan of een bepaald legveld wit dan wel zwart moet worden — een informatie die de machine nodig heeft om te beslissen of zij een wit dan wel een zwart legsel moet gaan proberen. Door de genoemde toevoeging ziet het volledige bord, waarop geopereerd wordt, er uit als in *fig. 4*; het heeft 96 velden, en de nummering loopt over elke rij geheel door, dus $n = 1, 2, \ldots, 96$. Men verifieert gemakkelijk dat door deze kunstgreep alle oneven velden zwart moeten worden. Het verschil tussen even en oneven kan een binaire machine, zoals de PASCAL, „in één oogopslag" (d.w.z. door controle van één bit) constateren.

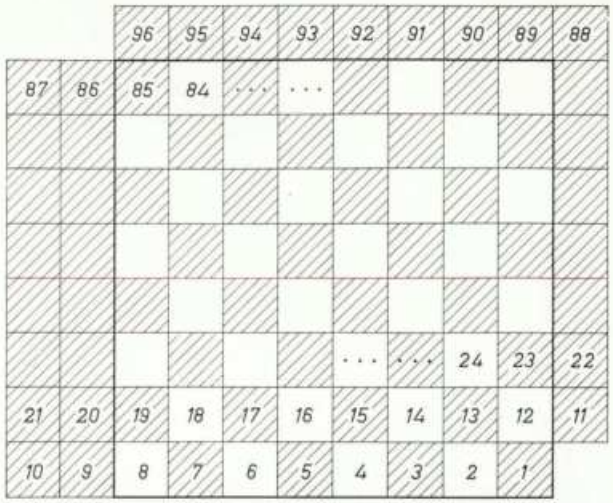


Fig. 4. Het bord waarop wordt geopereerd. Het schaakbord is aan drie zijden aangevuld met rijen fictieve velden die het de machine mogelijk maken om te toetsen of een neergelegd stuk niet buiten het schaakbord uitsteekt, en om snel na te gaan of een veld van het bord met een zwart dan wel een wit vakje moet worden belegd.

De manier waarop de machine de twee criteria kan hanteren, hebben we geschetst. Voor het eigenlijke „proberen van een legsel" moet de machine kunnen nagaan, welke velden van het bord door het neerleggen van een legsel bezet raken. Hiertoe verstrekken we aan de machine een beschrijving van elk legsel, in de vorm van een rij getallen, die als het ware de coördinaten van de vakjes van het legsel zijn. Men kan dit op verschillende wijzen doen. Wij doorlopen de vakjes van een legsel rij voor rij (volgnummer r), op dezelfde wijze als de velden van het bord, en geven als coördinaat van een vakje het verschil tussen het veldnummer dat dit vakje en het veldnummer dat het voorgaande vakje zal krijgen als het legsel ergens op het bord wordt geplaatst. Het grondvakje van het legsel behoeft uiteraard geen coördinaat. Neem als voorbeeld legsel $j_z = 1$ (zie fig. 2), dat zeven vakjes bezit; de rij getallen hiervoor luidt: 1, 1, 1, 1, 7, 1, 0. De 0 aan het eind van de rij wordt bij elk legsel toegevoegd om aan te duiden dat er geen vakje meer komt. De 19+21 getallenrijen, $U_z(j_z,r)$ en $U_w(j_w,r)$, die onze zwarte en witte legsels beschrijven, hebben we als twee lijsten in het geheugen van de machine opgeslagen. In tegenstelling met de eerder genoemde lijst $V(n)$ zijn dit geen werklijsten, doch materiaallijsten, met vaste inhoud.

Om nu het aan de beurt zijnde legsel te proberen, telt de machine, uitgaande van het veldnummer n_0 van het aan de beurt zijnde legveld, achtereenvolgens alle getallen $U(j,r)$ van het legsel hierbij op. Ze heeft daarmee de nummers gevonden van de reeks velden die door het legsel bezet zullen raken. De veldinhoud V op al deze adressen wordt onder-

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

zocht. Is er één positieve veldinhoud bij, dan is het legsel fout. Zijn alle veldinhouden negatief, dan worden ze alle vervangen door het nummer k van het stuk, en de beurt is voltooid.

Het oplosproces in zijn geheel; nog meer administratie

De laatstgenoemde handeling behoort al niet meer tot het „proberen", doch tot de administratie, het bijwerken van lijst V, en we zien meteen dat de tot dusver genoemde lijsten nog niet voldoende zijn: er is blijkbaar ook een lijst nodig die voor elk legsel j_z en j_w aangeeft, welk stuk k dat legsel is. Deze lijst noemen we resp. $S_z(j_z)$ en $S_w(j_w)$. Bovendien blijken voor de complete administratie nog een beurtenteller T (beurtnummer $= b$) en drie werklijsten $M(k)$, $B(b)$ en $N(b)$ nodig te zijn (zie *fig.* 5), waarvan de functie als volgt te begrijpen is.

Als de machine voor een bepaald legveld n_0 nagegaan heeft of n_0 even of oneven is, moet ze achtereenvolgens alle witte resp. zwarte legsels hierop proberen. Voor elk legsel j_w of j_z moet ze echter eerst nagaan of het desbetreffende stuk nog beschikbaar is. Hiertoe dient lijst M, die 11 geheugenplaatsen beslaat, corresponderende met de nummers $k = 1$ tot 11 der stukken. Op elke plaats houdt de machine boek van het aantal stukken met dat nummer dat nog over is; aan het begin van het oplosproces staat op plaats no. 5 een 2, op alle andere plaatsen een 1. Wil de machine een legsel plaatsen, dan test zij dus eerst of er in M op die plaats nog geen 0 staat.

In lijst B, die 12 plaatsen bevat, schrijft de machine bij elke neerlegbeurt b het nummer j van het legsel dat ze aan het proberen is, en wel positief voor een zwart, negatief voor een wit legsel. Blijkt het legsel fout te zijn, dan zoekt de machine dat genoteerde nummer in B op, verhoogt het met 1 en heeft daarmee het adres $j+1$ van het volgende te proberen legsel (natuurlijk van dezelfde kleur).

S_z

j_z	k
1	1
2	2
3	2
.	.
.	.
18	9
19	11

U_z

j_z	$r =$ 1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	7	1	0
2	1	11	11	11	11	0	
3	7	1	1	1	1	0	
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
18	1	10	1	11	0		
19	1	10	0				

S_w

j_w	k
1	1
2	2
3	2
.	.
.	.
20	11
21	11

U_w

j_w	$r =$ 1	2	3	4	5	6	7
1	1	10	1	11	11	11	0
2	1	1	1	1	7	0	
3	11	11	11	11	1	0	
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
20	10	1	0				
21	11	1	0				

V

n	
1	(−1)
2	(−1)
3	(−1)
4	(−1)
5	(−1)
6	(−1)
7	(−1)
8	(−1)
9	+20
10	+20
11	+20
12	(−1)
.	.
.	.
.	.
.	.
95	+20
96	+20

T

b

B

b	j
1	
2	
3	
.	
.	
.	
12	

M

k	
1	(1)
2	(1)
3	(1)
4	(1)
5	(2)
6	(1)
.	.
11	(1)

N

b	n_0
1	
2	
3	
.	
.	
.	
12	

Fig. 5. Het volledige stel „lijsten" waarmee de rekenmachine voor het oplossen van de puzzel moet werken. Elke lijst beslaat een deel van het geheugen van de machine. De lijsten $S(j)$ geven voor elk zwart of wit legsel j_z en j_w aan, welk nummer (k) het desbetreffende stuk heeft. De lijsten $U(j,r)$ bevatten de beschrijving van alle legsels, nl. de coördinaten der vakjes r van elk legsel. S en U zijn „materiaallijsten", met vaste inhoud. De overige zijn „werklijsten". In V wordt de inhoud der 96 velden (volgnummer n) genoteerd; op een leeg veld wordt $V = -1$ gesteld, de fictieve velden krijgen een vaste veldinhoud $+20$, en elk veld dat door een stuk k bedekt wordt, krijgt de veldinhoud $+k$. In lijst M wordt genoteerd, hoeveel stukken met nummer k nog beschikbaar zijn (0, 1 of 2 — het laatste alleen in geval van stuk no. 5). In lijst N schrijft de machine bij elke beurt b het nummer n_0 van het aan de beurt zijnde legveld, in lijst B het nummer j van het aan de beurt zijnde legsel (positief voor oneven n_0, d.w.z. zwarte legsels, negatief voor even n_0, d.w.z. witte legsels). Het beurtnummer b staat in de beurtenteller T.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

Dit opzoeken van het genoteerde nummer in B kan de machine niet zo gemakkelijk doen als een menselijke operateur: ze „weet" niet zomaar op welke plaats in B het getal j stond. Hieraan helpt haar de beurtenteller T. Na elke geslaagde beurt beurt het nummer n_0 van het legveld waarop ze legsels moet gaan proberen. Dit veldnummer vindt de machine na een geslaagde beurt, door alle velden in lijst $V(n)$ in volgorde te doorlopen en het eerste te nemen waarvan de veldinhoud —1 blijkt te zijn.

Fig. 6. De elf oplossingen van de puzzel, die de PASCAL op de schrijfmachine heeft uitgetikt. In plaats van de getallen 1 tot 11 hebben we de machine de letters A tot K laten afdrukken, wat een overzichtelijker beeld geeft. Daar bij het tikken van links naar rechts en van boven naar beneden wordt gegaan, verschijnen de oplossingen hier 180° gedraaid ten opzichte van de gegeven beschrijving (vgl. fig. 3).

wordt het getal b in deze teller (d.w.z. op de vaste geheugenplaats waar die telling geschiedt) met 1 verhoogd, en het nieuwe getal dient als adres voor het schrijven en het telkens zoeken in $B(b)$.

Het dient eveneens als adres voor het gebruik van de laatste lijst, $N(b)$. Hierin schrijft de machine bij elke

Komt de machine in de situatie dat in een beurt alle legsels tevergeefs geprobeerd zijn, dan kan ze nu, zoals we in het begin hebben geëist, aan de hand van de administratie op haar schreden terugkeren. Ze moet het neergelegde legsel j van de vorige beurt verwijderen, en die beurt voortzetten met

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

legsel $j+1$. Hiertoe verlaagt ze het getal in de beurtenteller met 1, dus van b tot $b-1$. Met het adres $b-1$ zoekt ze in lijst B het nummer j van het ongeschikt gebleken legsel en in lijst N het legveld n_0 van dat legsel op. Op het adres n_0 in lijst V vindt ze het nummer k van het neergelegde stuk. Op dit adres plaatst ze nu weer een -1, en evenzo op alle plaatsen in V die door het mislukte legsel j bedekt waren (en die ze met de lijsten S en U opnieuw bepaalt). Tevens gaat ze naar lijst M en verhoogt op het gevonden adres k het ten onrechte verlaagde getal weer met 1. Ze behoeft nu alleen nog het nummer j van het legsel op het adres $b-1$ in lijst B met 1 te verhogen. De beurt gaat dan met $j+1$ verder als beschreven.

Zijn eenmaal alle 12 opeenvolgende beurten met succes uitgevoerd — d.w.z. is een oplossing gevonden — dan „merkt" de machine dit door het feit dat nu in de beurtenteller het getal $b=13$ verschijnt. Dit is het sein voor de machine om de volledige dan aanwezige inhoud van werklijst V in de vorm van een schaakbord op de schrijfmachine uit te tikken: de nummers k die in de lijst staan, geven immers voor elk veld aan, tot welk stuk het nu behoort. Men krijgt aldus het eerste in *fig. 6* weergegeven schaakbord.

De machine handelt dan verder alsof beurt 13 mislukt was: ze neemt het laatste legsel terug dat in beurt 12 neergelegd werd en tracht dit door een ander legsel te vervangen, wat natuurlijk niet lukt. Ze neemt daarna ook de beurt 12 terug en tracht beurt 11 anders voort te zetten, enz.

In die situatie lijken de handelingen van de machine nogal „onintelligent", want het is zonneklaar dat het terugnemen van één stuk of ook van twee stukken niet tot een andere oplossing zal kunnen leiden. Maar de machine kan niet anders dan het strenge systeem volgen, dat volledigheid garandeert. De enkele miljoenste seconden die ze verspilt aan voor ons gevoel „onnodige" pogingen, moeten we daarvoor maar over hebben.

Na voldoende ver teruggegaan te zijn, zal de machine met een nieuwe serie beurten succes hebben. Successievelijk vindt zij op deze wijze, zoals in het begin al werd vermeld, *elf* oplossingen. Deze zijn alle in fig. 6 weergegeven.

Ook na het uittikken van de laatste mogelijke oplossing gaat de machine nog gewoon door met terugnemen en verder zoeken. Klaarblijkelijk zal zij dan steeds verder terug moeten gaan, en bij elke teruggenomen beurt wordt het getal b in de beurtenteller met 1 verlaagd. Zijn alle beurten teruggenomen, dan verschijnt in de teller het getal $b=0$. Dit is voor de machine het sein dat alle combinaties geprobeerd zijn en dat ze kan stoppen.

Voor het volledige oplosproces, inclusief het terugkeren tot $b=0$, blijkt de PASCAL acht minuten nodig te hebben.

Samenvatting. Met elektronische rekenmachines worden ook vele problemen opgelost die (althans in eerste aanleg) niets met rekenen te maken hebben. Als voorbeeld van zulk een probleem wordt hier een legpuzzel beschreven, die als studieobject voor het programmeren voor de PASCAL heeft gediend. Het oplosproces dat voor de puzzel is uitgewerkt, is gekenmerkt door systematiseren en administreren. Hiertoe worden „materiaallijsten" en „werklijsten" in het geheugen van de machine geplaatst en bijgehouden. Het volledige oplosproces vereist het onderzoeken van ca. 3 miljoen mogelijkheden en leidt tot elf essentieel verschillende oplossingen. De PASCAL doet over het gehele proces acht minuten.

REKENGELUIDEN VAN DE PASCAL

door W. NIJENHUIS *).

681.14

Het werk van een elektronische rekenmachine bij het oplossen van rekenvraagstukken bestaat in vele gevallen uit het doorlopen van zich steeds herhalende cyclussen, en van cyclussen binnen cyclussen. Dit zal misschien uit de voorgaande artikelen in dit nummer duidelijk geworden zijn.

Sommige bouwers van rekenmachines zijn op de gedachte gekomen deze cyclussen te beluisteren, door de getallen die de rekenregisters passeren, met behulp van een luidspreker weer te geven. Men verbindt daartoe de luidspreker aan één der flip-flops in een register van het rekenorgaan. De spanningswisselingen van die flip-flop bij het passeren van getallen worden dan hoorbaar. In sommige gevallen is het patroon van de spanningswisselingen zo willekeurig en wisselt het ook zo snel dat slechts een sissend geruis ontstaat. Vaak echter blijken de genoemde cyclussen een herkenbare regelmaat in het geluid te veroorzaken, soms zelfs zo dat men een toon krijgt.

*) Philips' Natuurkundig Laboratorium, Eindhoven.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

Elk programma of onderdeel van een programma wekt aldus een eigen geluid op, waaraan het te herkennen is. De geluiden leveren hierdoor een controle op de juiste werking van de rekenmachine: de programmeur, die tijdens het testen van zijn programma reeds met de kenmerkende geluiden heeft kennis gemaakt, kan later vaak op het gehoor vaststellen of de berekening normaal verloopt. Ook bij de PASCAL wordt van deze mogelijkheid gebruik gemaakt. De luidspreker wordt daartoe aangesloten b.v. op de meest rechtse (minst significante) plaats van het *S*-register [1]).

Om een en ander te illustreren, hebben we op het hierbij gevoegde grammofoonplaatje fragmenten geregistreerd van de rekengeluiden die de PASCAL produceert bij de berekeningen die in vier van de artikelen in dit nummer zijn besproken. De lezer vindt deze vier fragmenten op zijde 1 van de plaat, onderling gescheiden door zichtbare marges; akoestisch zijn ze gemerkt door een inleidend morseteken. Het eerste fragment is nog onderverdeeld in drie stukken, elk alleen door een morseteken aangegeven. De geluidsfragmenten zijn afkomstig van de volgende berekeningen:

Klaverbladcyclotron [2]) { fourieranalyse: —.
gladstrijken: —..
calibratie: —...
Snijverliezen van golfkarton [3]): ——
Potentiaalvelden en elektronenbanen [4]): ———
Legpuzzel [5]): ————

Voor elk fragment lichten wij in het onderstaande toe, bij welk soort operaties de verschillende geluiden behoren. Op zijde 2 van de grammofoonplaat zal de lezer daarna andere geluiden van de PASCAL kunnen beluisteren, waarbij een diepergaande beschrijving van het verband met de rekenoperaties mogelijk is.

Zijde 1, eerste geluidsfragment (—)

—.

Het geluid van het eerste deel van het eerste fragment, dat betrekking heeft op de fourieranalyse van meetgegevens van het klaverbladcyclotron [2]), is fonetisch ongeveer weer te geven door:

groem tik t to-do-de-do-da-de-di-du-da,

gevolgd door een aantal malen „tik tik", en dit geheel ettelijke keren bijna identiek herhaald.

Tijdens het eerste „groem" worden vanaf de ponsband 60 getallen ingevoerd, die meetresultaten inhouden betreffende het azimutale verloop van het magneetveld op een bepaalde straal in het interferricum van het cyclotron, bij bepaalde keuze van de parameters (correctiestromen enz.). In de pauze daarna worden een of enkele regels gedrukt, vermeldende de genoemde keuze der parameters. Tijdens het korte geluidje „tik" worden de metingen met behulp van een 7de-graadskromme (zie —...) herleid tot waarden van de magnetische inductie, en worden de afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde veld berekend. Het nu volgende samengestelde geluid wordt voortgebracht door de eigenlijke fourieranalyse. Ze omvat de volgende operaties: de fouriercoëfficiënten van de orde 0 (constante term), 3, 6 enz. worden achtereenvolgens berekend; de in elk der 60 veldpunten berekende som van de verkregen fourierreeks, tot een bepaalde orde, wordt van de in dat punt gemeten veldwaarde afgetrokken; van de 60 verschillen wordt een autocorrelatie berekend; is deze te groot uitgevallen, dan wordt de procedure herhaald met de fourierreeks tot de eerstvolgende orde. Meestal is, als men 6 ordes in aanmerking neemt (dus de constante term en 12 fouriertermen), de autocorrelatie van het restant klein genoeg geworden; de antwoorden worden dan voor het afdrukken gereed gemaakt en in een aantal regels afgedrukt (de reeks geluiden „tik tik tik ...").

Bij de volgende reeks geluiden beginnende met groem- wordt dezelfde berekening uitgevoerd voor de meetserie behorende bij een volgende waarde van de straal, enz.

—..

Het „gladstrijken" produceert een geluid ongeveer als:

te-te-te-te-te-fiet,

en dit weer een aantal keren herhaald. Het proces bestaat elke keer in het afleiden van een „gladde" tabel $\bar{y}_i$ uit de oorspronkelijk berekende tabel y_i van één der fouriercoëfficiënten, voor 32 cirkels i van toenemende diameter, zodanig dat de waarden van die fouriercoëfficiënt voor opeenvolgende cirkels „glad" in elkaar overgaan. De machine berekent daartoe $\bar{y}_i$ zodanig dat

$$\sum_i [\delta^4(\bar{y}_i)]^2 + K(\bar{y}_i - y_i)^2,$$

bij een bepaalde gekozen factor K, minimaal wordt; $\delta^4(\bar{y}_i)$ stelt hierin de 4de differentie van $\bar{y}_i$ voor. Men kiest eerst een grote waarde K; $\bar{y}_i$ ligt dan nog dicht bij y_i, en de autocorrelatie van de ver-

[1]) Zie Philips techn. T. **23**, 1-19, 1961 (no. 1), speciaal blz. 4.
[2]) H. L. Hagedoorn en N. F. Verster, Philips techn. T. **24**, 106-120, 1962 (no. 4/5).
[3]) H. W. van den Meerendonk en J. H. Schouten, Philips techn. T. **24**, 121-129, 1962 (no. 4/5).
[4]) C. Weber, Philips techn. T. **24**, 130-143, 1962 (no. 4/5).
[5]) A. J. Dekkers en A. J. W. Duijvestijn, Philips techn. T. **24**, 151-157, 1962 (no. 4/5).

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

schillen $\bar{y} - y$ is klein. Een kleinere K doet de $\bar{y}$ „gladder" worden, doordat de 4de differenties meer invloed krijgen. Elke -te- in het geluid beantwoordt aan een stap in K. Het proces wordt afgebroken als de autocorrelatie boven een vooraf gegeven waarde komt, wat nl. erop wijst dat bij het gladstrijken behalve „ruis" ook „informatie" wordt weggemiddeld. Daarna wordt het proces herhaald voor de volgende fouriercoëfficiënt, enz.

—...

Het derde deel van het eerste fragment duurt maar heel kort, minder dan 1 seconde. Dit deel is het geluid van de volledige berekening — volgens de methode der kleinste kwadraten — van de 8 coëfficiënten van het 7de-graadspolynoom waarvan de grafiek zo goed mogelijk door 22 ijkpunten loopt.

De drie weergegeven geluiden van dit fragment illustreren wel heel duidelijk de grote rekensnelheid van de PASCAL.

Zijde 1, tweede geluidsfragment (——)

Het tweede fragment, dat betrekking heeft op het vraagstuk van de snijverliezen, contrasteert sterk met het eerste. Daar het proces van de „lineaire programmering", die voor de oplossing van het vraagstuk wordt toegepast, in het desbetreffende artikel [3]) slechts zeer globaal is besproken, willen we ook over de explicatie van het rekengeluid niet veel zeggen. We wijzen er alleen op dat elke cyclus in het geluid aan één volledige iteratie beantwoordt.

Zijde 1, derde geluidsfragment (———)

De berekeningen van potentiaalvelden en elektronenbanen in het aangehaalde artikel [4]) zijn, zoals daar is beschreven, met de IBM 650 uitgevoerd. De programma's zijn echter inmiddels herschreven voor berekening met de PASCAL, en het weergegeven rekengeluid in ons derde fragment is afkomstig van een potentiaalberekening met deze machine, voor bepaalde randvoorwaarden (bepaalde elektrodenconfiguratie en spanningen op de elektrodes). Het geluid doet enigszins denken aan het kakelen van een kip; het is fonetisch weer te geven als een veelvuldige herhaling van het groepje

kri-lu-dlu-dlu-dlu-...

Elk van deze groepjes komt overeen met een iteratiegang over het gehele potentiaalveld. Bij sommige randvoorwaarden zijn voor convergentie wel 100 van deze iteratiegangen nodig.

Tijdens elke „lu" wordt de potentiaal in een rij netpunten op een lijn evenwijdig met de as van het elektrodensysteem berekend. De toonhoogte van „lu" wordt bepaald door de aard van de rekencyclus per netpunt, de duur van „lu" door de lengte van de desbetreffende puntenrij. De opeenvolgende toontjes „lu" beantwoorden aan de opeenvolgende puntenrijen op toenemende afstand van de as — en daar de lengte van de verste puntenrijen, naar gelang van de elektrodenconfiguratie, anders is dan die van de het dichtst bij de as gelegene, verschillen de toontjes „lu" in duur. Het eerste toontje, „kri", beantwoordt aan de berekening voor alle netpunten op de as zelf; daar de berekening hier met een andere formule gebeurt [4]), is de toonhoogte van de „kri" anders dan die van de „lu".

De potentiaalwaarden voor alle netpunten (b.v. 3000 punten) worden in het trommelgeheugen van de PASCAL bewaard. Bij de berekening voor een netpunt moeten de (voorlopige) potentiaalwaarden in netpunten van drie opeenvolgende puntenrijen worden gebruikt. Deze „werkgegevens" worden daartoe naar het kerntjesgeheugen overgebracht. Is de berekening voor alle punten van een rij uitgevoerd, dan worden de werkgegevens van de het dichtst bij de as gelegen puntenrij teruggebracht naar de trommel en die van een nieuwe, verder van de as gelegen, puntenrij van de trommel gehaald. Dit transport veroorzaakt de klanken „d" in de reeks „lu-dlu-dlu...". Aan het eind van een iteratiegang over het gehele puntenveld worden alle laatstgebruikte werkgegevens opgeborgen en worden de gegevens van de puntenrij op de as en de twee eerstvolgende puntenrijen gehaald. Dit langere transport veroorzaakt de tussenruimte tussen de groepjes „kri-lu-dlu ..." onderling.

Zijde 1, vierde geluidsfragment (————)

Het vierde fragment, dat betrekking heeft op de oplossing van een legpuzzel [5]), vertoont weer een geheel ander karakter. Eerst hoort men het geluid dat ontstaat tijdens het invoeren van het programma (ponsband). Na ca. 12 seconden gaat het geluid over in het rekengeluid. Dit heeft geheel het karakter van ruis en duurt voort totdat de eerste oplossing van de puzzel gevonden is. De PASCAL tikt deze oplossing dan op de schrijfmachine, en in die tijd hoort men niets, daar dan met het S-register niets gedaan wordt. Deze periode stilte, die in werkelijkheid ca. 16 s duurt, is op de plaat bekort tot ca. 5 s. Hierna hoort men de machine meteen de volgende oplossing zoeken, waarmee ongeveer 1 s gemoeid is. Na het uittikken hiervan (eveneens bekort tot 5 s) begint het rekenwerk voor de derde oplossing, dat ruim 20 s duurt, waarna het fragment is afgebroken. In totaal bezit de puzzel elf essentieel verschillende oplossingen, waarvan het vinden en uittikken te zamen ca. 8 minuten vergt. De machine heeft in die tijd enkele miljoenen combinaties geprobeerd.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

We gaan nu over tot zijde 2 van de grammofoonplaat. Het eerste geluidsfragment van deze zijde heeft betrekking op het zoeken van priemgetallen, en voor dit geval willen we een meer gedetailleerde verklaring van de rekengeluiden geven. Het tweede geluidsfragment heeft een muzikaal karakter, en het laatste fragment sluit logisch hierbij aan.

Zijde 2, eerste geluidsfragment

Het programma voor het zoeken van priemgetallen heeft een tijdlang dienst gedaan als voorbeeld om de PASCAL in werking te demonstreren. Men laat de machine dan de oneven getallen G, vanaf een willekeurig voorgeschreven getal, stuk voor stuk onderzoeken op deelbaarheid door de oneven getallen $p \geqq 3$. De resultaten kan men, door gebruik van iets verschillende programma's, op verschillende manieren door de machine laten vastleggen. Het meest voor de hand ligt het om de machine elk gevonden priemgetal te laten uittikken en de overige getallen niet. Deze werkwijze hebben we gevolgd bij het opnemen van het rekengeluid op de grammofoonplaat. Een andere, heel pregnante, manier is die van het „priemgetallenpatroon": de machine tikt voor elk onderzocht getal G een punt als G deelbaar blijkt te zijn, en een ander teken, b.v. het cijfer 1, als G ondeelbaar, dus een priemgetal is. Op deze wijze is b.v., beginnende met het getal 34 359 738 000, van de 1000 hierop volgende oneven getallen het in *fig. 1* weergegeven patroon geproduceerd, waarin zeer aanschouwelijk de willekeurige verdeling der priemgetallen te zien is. We vermelden nog een derde manier om de resultaten vast te leggen, die ons bij de onderstaande beschouwingen van pas zal komen: men kan de machine alle opeenvolgende getallen (eventueel inclusief de even getallen) volledig in hun factoren laten ontbinden en de ontbindingen laten uittikken. Men krijgt dan een tabel als in *fig. 2* is gereproduceerd, voor 62 getallen uit het in fig. 1 afgebeelde patroon, die beginnen bij de met een cirkeltje aangegeven plaats (het getal $2^{35} + 1$). Dit is precies het getallengebied dat de machine heeft afgewerkt tijdens het opnemen van ons geluidsfragment. De priemgetallen in dit gebied zijn onmiddellijk te herkennen (in fig. 2 met een ster gemerkt).

We bespreken nu het rekengeluid. Bij het zoeken naar grote priemen begint het geluid als een geruis, waaruit zich een sireneachtig loeien ontwikkelt, dat eindigt in een kort ogenblik stilte tijdens het uittikken van de gevonden priem. Soms gaat het loeien ineens weer in geruis over, ten teken dat een adspirantpriem na enig rekenwerk deelbaar is gebleken en de machine een volgend getal (en eventueel verder volgende getallen) is gaan onderzoeken. Dit geval doet zich in ons fragment reeds vóór het vinden van het eerste priemgetal (d) voor: de machine heeft dan nl. reeds de „lastige" getallen a, b en c onderzocht (zie fig. 2), waarbij de delingspogingen pas bij grote delers p succes hebben, en waarvan vooral het werk aan getal c duidelijk hoorbaar wordt. Verder worden nog de priemen f, g, h in het geluidsfragment gevonden, waartussen als enigszins „lastige" ontbinding alleen nog getal e voorkomt.

Om het ontstaan van het eigenaardige, in toonhoogte op- en neergaande, loeien te verklaren, moeten wij nagaan wat er tijdens het programma in het S-register van de PASCAL gebeurt, en wel speciaal met de laatste bit hiervan, waarop de luidspreker is aangesloten. Het S-register wordt ge-

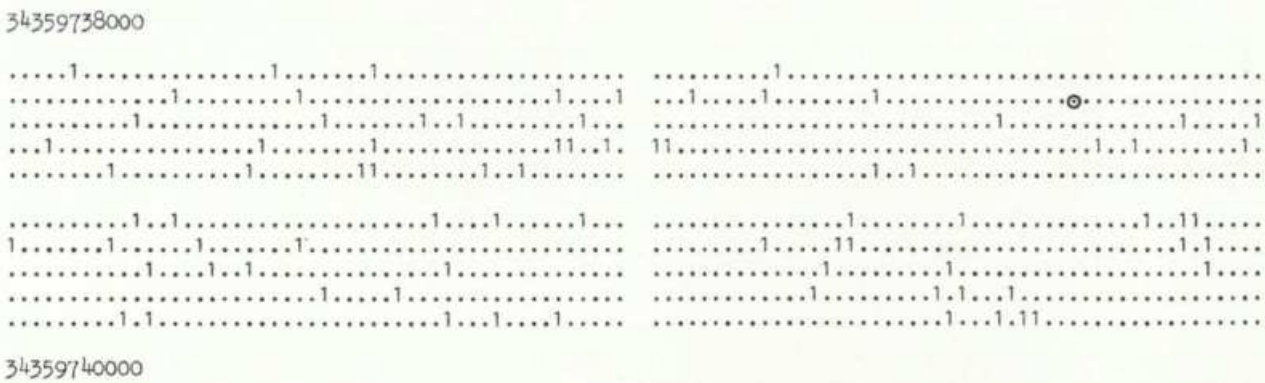


Fig. 1. Priemgetallenpatroon, voor de 1000 oneven getallen tussen 34 359 738 000 en 34 359 740 000. Het getal $2^{35} + 1$, waarbij in het geluidsfragment de machine begint te rekenen, is door een cirkeltje aangeduid. — Gewezen zij op de „paren" priemgetallen, die men hier en daar in het patroon tegenkomt. Blijkens de ervaring (een bewijs is er nog niet voor geleverd) blijven zulke paren optreden, hoe ver men ook met het zoeken doorgaat.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023


```
      34359738369=3.11.43.281.86171
      34359738371=7.4908534053
      34359738373=59.582368447
      34359738375=3.5.5.5.811.112979
      34359738377=17.19.106376899
      34359738379=97.103.149.23081
      34359738381=3.3.3.3.1427.297263
      34359738383=163.883.238727
      34359738385=5.7.29.33851959
      34359738387=3.13.23.38305171
a     34359738389=20249.1696861
      34359738391=11.3123612581
      34359738393=3.347.1699.19427
      34359738395=5.6871947679
      34359738397=673.51054589
      34359738399=3.3.7.7.77913239
b     34359738401=37511.915991
      34359738403=53.3319.195329
      34359738405=3.5.2290649227
c     34359738407=132949.258443
      34359738409=157.3109.70393
      34359738411=3.17.2221.303341
      34359738413=7.11.13.34325413
      34359738415=5.19.361681457
      34359738417=3.3.3817748713
      34359738419=467.73575457
d   * 34359738421=34359738421
      34359738423=3.37.309547193
      34359738425=5.5.1374389537
      34359738427=7.42461.115601
      34359738429=3.31.181.277.7369
      34359738431=419.1583.51803
      34359738433=23.1493901671
      34359738435=3.3.3.5.11.23137871
e     34359738437=29077.1181681
      34359738439=13.67.39448609
      34359738441=3.7.41.39906781
      34359738443=29.1184818567
      34359738445=5.17.3343.120919
      34359738447=3.10529.1087781
      34359738449=1171.29342219
f   * 34359738451=34359738451
      34359738453=3.3.19.89.2257687
      34359738455=5.7.43.47.485753
      34359738457=11.107.139.210019
      34359738459=3.11453246153
      34359738461=61.563274401
      34359738463=1571.21871253
      34359738465=3.5.13.173.937.1087
g   * 34359738467=34359738467
      34359738469=7.193.25432819
      34359738471=3.3.3817748719
h   * 34359738473=34359738473
      34359738475=5.5.15107.90977
      34359738477=3.73.1543.101681
      34359738479=11.17.23.167.47837
      34359738481=617.5003.11131
      34359738483=3.7.439.3727057
      34359738485=5.27541.249517
      34359738487=151.1531.148627
      34359738489=3.3.3.241.5280427
      34359738491=13.19.19.31.59.4003
    *
```

Fig. 2. Tabel van de uitgetikte ontbindingen in priemfactoren voor de 62 oneven getallen van $2^{35} + 1$ tot $2^{35} + 123$.

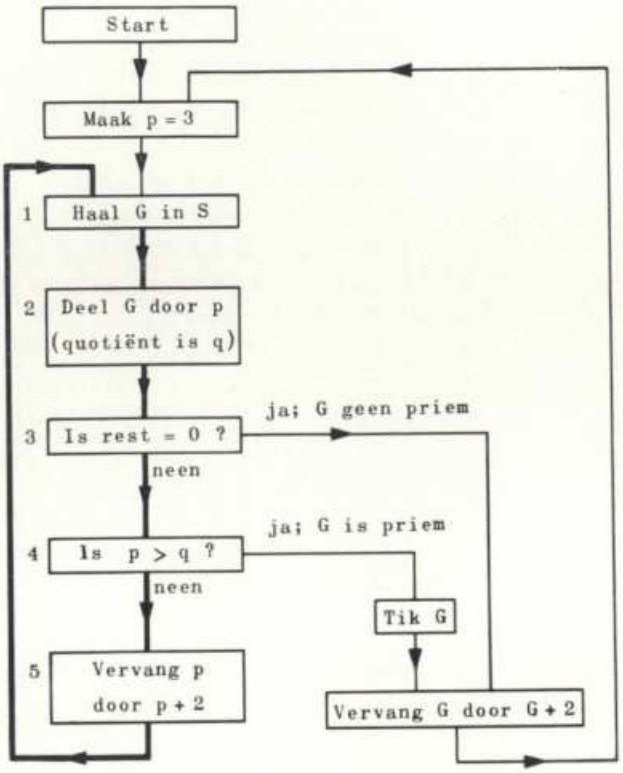


Fig. 3. Programma voor het zoeken van priemgetallen.

bruikt tijdens de delingen: bij de aanvang van elke deling zet de machine in S het deeltal, bij het einde van de deling staat in S het quotiënt. Het programma bevat de in *fig. 3* aangegeven stappen [6]).

De dik getekende cyclus duurt bij de PASCAL vrijwel precies 180 μs. Het is wel duidelijk dat daardoor het onderzoek van de meeste getallen G (welke deelbaar blijken door 3, 5, 7 of een ander betrekkelijk klein getal) in enkele milliseconden klaar is. Alleen als G ondeelbaar is of uitsluitend zeer grote priemfactoren bevat, moeten de delingen tot grote delers p worden voortgezet (bij ondeelbaarheid tot $p \approx \sqrt{G}$); de dik getekende cyclus wordt dan vele malen herhaald. Dit is het stadium waarin het sirenegeluid gaat optreden. Alle andere getallen samen dragen telkens slechts bij tot een sissend geluid aan het begin van zo'n stadium.

Bezien wij nu wat tijdens de genoemde cyclus, in de stappen *1-5* van het schema, met de laatste bit van S gebeurt.

1) Daar G steeds oneven is, wordt de laatste bit van S een 1. Deze 1 staat er ca. 10 μs.

2) Het quotiënt q wordt in S opgebouwd. Hierbij passeren ettelijke enen en nullen de laatste

[6]) Dit programma is zeker niet het meest economische voor het doel, aangezien G door alle oneven getallen p wordt gedeeld, terwijl natuurlijk het resultaat van een deling door b.v. 9 of 15 al vaststaat als gevonden is dat de delingen door 3 en 5 niet opgaan.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

plaats van S, volgens een vrijwel onregelmatig patroon. Dit duurt ca. 75 μs.

3) 4) 5) Het quotiënt q blijft onaangetast in S staan; de inhoud van de laatste bit van S blijft dus onveranderd. Dit duurt 95 μs.

De spanningswisselingen op de luidspreker tijdens één dik getekende cyclus komen er dus uit te zien als in *fig. 4a* of *b*, naar gelang het quotiënt q even of oneven is. Waar het nu eigenlijk om gaat, is de afwisseling tussen even en oneven q.

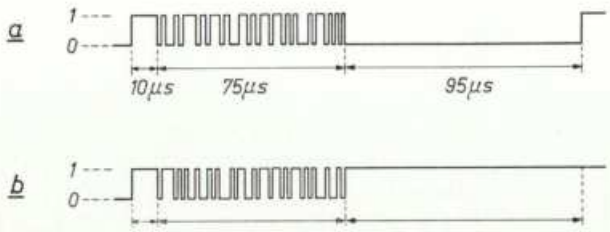


Fig. 4. Spanningswisselingen op de luidspreker tijdens één dik getekende cyclus van fig. 3.
a) Quotiënt q even, *b*) q oneven.

In eerste instantie zal deze afwisseling geheel onregelmatig zijn. In de luidsprekerspanning is dan als periodiciteit alleen de grondperiode van de cyclus, ter lengte van 180 μs, te onderkennen, en het enige wat zich daarin streng herhaalt, is de aanwezigheid van de spanning 1 tijdens stap (*1*), die 10 μs duurt. De in stap (*2*) hierop volgende impulsgroep is chaotisch, evenals de wisseling in de hierop volgende toestand tijdens de stappen (*3*, *4*, *5*). Men zal daardoor slechts een boventoonrijke en weinig opvallende toon van $10^6/180 \approx 5500$ Hz kunnen horen.

Is de machine met een groot getal G bezig, dan komt er echter van lieverlee een zekere regelmaat in het afwisselen van even en oneven quotiënten q. Om dit in te zien, beschouwe men de grafische voorstelling van de betrekking $G = pq +$ rest: de grafiek is een trapjeskromme (*fig. 5*), die het beloop volgt van de hyperbool $PQ = G$ (P en Q zijn continue variabelen, in plaats van de discrete variabelen p en q) en waarbij elk trapje door een stap $+2$ in p ontstaat. We richten onze aandacht eerst op het gebiedje waar de hyperbool de helling $m = -\frac{3}{2}$ heeft. Is G zeer groot, dan beantwoordt in dit gebiedje aan elke stap $\Delta p = 2$ een traphoogte $\Delta q = -3$. Hier wisselt q dus *bij elke stap* tussen even en oneven, deze wisselingen geven de luidsprekerspanning een periode van 2×180 μs (de kortste bij het wisselen mogelijke) en moeten dus als een toon van ca. 2800 Hz hoorbaar worden. Hetzelfde geldt blijkbaar voor de gebiedjes met de hellingen $m = -\frac{5}{2}$, $m = -\frac{7}{2}$ enz., en de „hoogtepunten" in het sirenegeluid betekenen dat de machine dan telkens in zo'n gebiedje van de hyperbool aan het werk is.

Dat daartussenin het geluid telkens in hoogte zakt en weer stijgt, is op analoge wijze in te zien. In de gebiedjes waar de helling m van de hyperbool gelijk aan een (negatief) *geheel* getal is, maakt het quotiënt bij elke stap $\Delta p = 2$ een *even* stap $\Delta q = 2|m|$, wisselt dus *niet* tussen even en oneven. Een ruwe schatting leert dat het ononderbroken aantal herhalingen van deze even stap Δq van de orde van grootte

$$t_m = k \sqrt[4]{G/|m|^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zal zijn, waarbij k een factor ter grootte van ca. $\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{5}$ is. Na deze serie even stappen zal er één oneven stap Δq komen — dus een spanningssprong aan de luidspreker — en dan weer een hele serie even stappen, welke serie ruwweg dezelfde lengte t_m zal hebben, en dit zo achtereenvolgens ettelijke keren (als G maar zeer groot is!). De spanningssprongen nabij het beschouwde gebiedje met heeltallige m van de hyperbool veroorzaken dus de vrij lange periode $2t_m \times 180$ μs, het geluid heeft hier een veel lagere toonhoogte dan voorheen. Geleidelijk worden de series van even traphoogte Δq en dus de periode van de spanningssprongen korter, naarmate we het eerstvolgende gebiedje met halftallige m van de

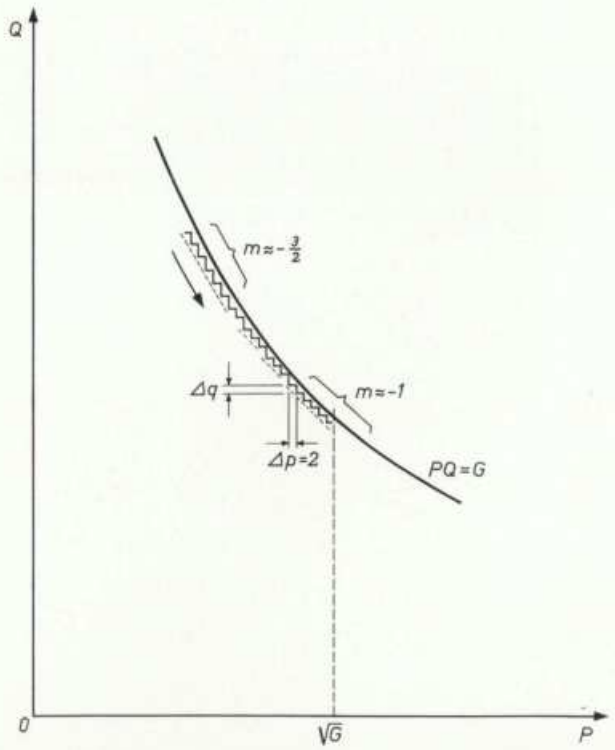


Fig. 5. Hyperbool $PQ = G$ en trapjeskromme $G = pq +$ rest.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

hyperbool naderen, en vervolgens weer langer naarmate de volgende heeltallige m in zicht komt. Dit is het verschijnsel van het „loeien".

Voor $m = \ldots -3, -2, -1$ en $G \approx 2^{35}$ (in de buurt van deze G immers is ons geluidsfragment opgenomen) vinden we uit (1) respectievelijk ongeveer de periodes 40×360, 50×360 en 90×360 μs, dus ongeveer de frequenties 70, 55 en 30 Hz. Dit zouden achtereenvolgens de toonhoogten van het geluid in de laatste drie „dieptepunten" vóór het vinden van het priemgetal moeten zijn, want vanaf $m = -1$ wordt $p > q$ $(p > \sqrt{G})$ en behoeft de machine niet verder te rekenen (zie stap (*4*) in fig. 3). Kwantitatief is een en ander moeilijk te toetsen, daar men — vermoedelijk ten gevolge van het grote en voortdurend wisselende gehalte aan boventonen en de steeds glijdende toonhoogte — moeilijk betrouwbare toonhoogtemetingen aan het rekengeluid kan doen. Kwalitatief lijkt ons echter het geluid hiermee voldoende verklaard.

Zijde 2, tweede geluidsfragment

Na het bovenstaande zal het duidelijk zijn dat men een elektronische rekenmachine, door deze een geschikt opgezet „reken"-programma te laten afwerken, een melodie kan laten zingen. Dit is dan ook een zeer gebruikelijke wijze om bij de plechtige opening van rekeninstituten of bij soortgelijke gelegenheden de machine tot uiting te laten brengen dat ze in de feestvreugde deelt. Het programma voor het zingen ziet er bij de PASCAL uit als in *fig. 6* is weergegeven. Telkens als de machine de opdracht „Inverteer S" uitvoert, worden alle enen van de (willekeurige) inhoud van het S-register vervangen door nullen en omgekeerd. Er komt dus een spanningswisseling op de bit waarop de luidspreker is aangesloten. Dit wordt periodiek herhaald met een tussentijd van t μs, welke bepaald wordt door de „wacht"-opdracht (bij de PASCAL uitgevoerd als combinatie van een „doe niets"- en een herhaalopdracht, zie [1], blz. 15). Hierdoor ontstaat een toon met de frequentie $10^6/2t$. De herhaling geschiedt n maal, zodat de toon $n\times t$ μs duurt. Een lijstje van successievelijk toe te passen wachttijden t en herhalingsaantallen n representeert de te zingen melodie en wordt in het geheugen van de machine opgeborgen.

Op deze wijze hebben wij een menuet van Mozart geprogrammeerd en als tweede geluidsfragment op zijde 2 van het grammofoonplaatje opgenomen. De „frasering" van de melodie is verkregen door het aanbrengen van geschikte rusten. De spanningswisselingen aan de luidspreker verlopen bij elke toon zuiver periodiek, maar doordat deze wisselingen zelf het karakter van een blokjeskromme („vierkante sinus") hebben, krijgen de tonen van de PASCAL een nasaal timbre.

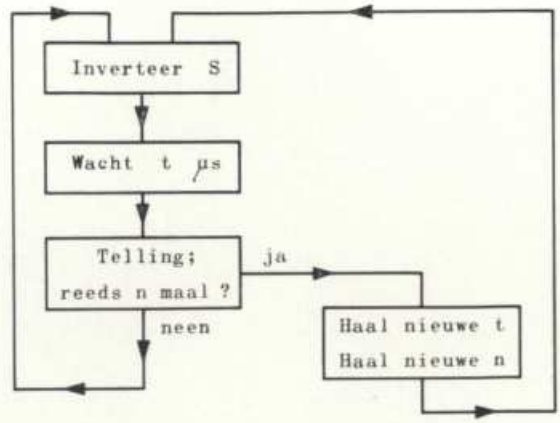


Fig. 6. Programma voor het zingen van een melodie. De melodie is als een lijst van waarden van t (toonhoogte) en n (toonduur) in het geheugen van de rekenmachine opgeborgen.

Zijde 2, laatste geluidsfragment

De programma's die aan de PASCAL worden toegevoerd, hebben altijd de vorm van een serie tekens die in een band zijn geponst en die volgens een bepaalde code worden gelezen als getallen die nummers van operaties, adresnummers in het geheugen of rekengetallen voorstellen. Aansluitend op het zojuist meegedeelde over het programma voor het „zingen", kunnen we nu nog de curieuze stap doen dat we als melodie-informatie niet het lijstje van waarden van t en n toevoeren dat aan de noten van het menuet van Mozart (of een ander muziekstuk) beantwoordt, maar dat we hiervoor een willekeurig stuk programmaband gebruiken, waarbij de machine steeds het ene teken in de band als t en het volgende als n interpreteert, en zo vervolgens de hele band langs. Men kan dan verwachten dat de machine muzikale tonen zal laten horen die te zamen een soort „stochastische muziek" vormen (op het toeval berustende en daardoor niet op grond van enigerlei muziekwetten voorspelbare tooncombinaties), waarover door componisten en muziektheoretici de laatste jaren weleens wordt gesproken. We hebben dit gerealiseerd door als „muziekinformatie" ons testprogramma voor het kerntjesgeheugen te gebruiken. Het resultaat is het laatste geluidsfragment op ons grammofoonplaatje. Geheel „stochastisch" is deze muziek kennelijk niet, er was blijkbaar al te veel regelmaat in het testprogramma, maar het effect is wellicht wonderlijk genoeg om tot nadenken over het wezen van wat wij een „melodie" noemen aan te zetten.

Samenvatting. Door aansluiten van een luidspreker op een van de flip-flops van het rekenorgaan van een elektronische rekenmachine, kan men het voortdurend passeren van getallen

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!

www.freeservicemanuals.info 11/14/2023

door het desbetreffende register hoorbaar maken. Doordat de machine bij vele rekenprogramma's vele malen eenzelfde cyclus moet doorlopen, ontstaan in de luidspreker vaak duidelijk onderscheidbare geluiden, die eventueel zelfs een akoestische controle op de werking van de machine mogelijk maken. Op een bij het artikel gevoegd gramomfoonplaatje zijn een aantal fragmenten opgenomen van de geluiden waarmee de berekeningen door de PASCAL voor een viertal, in hetzelfde tijdschriftnummer gepubliceerde, artikelen gepaard gaan. Voorts is op het plaatje het geluid weergegeven dat ontstaat als de rekenmachine zeer grote priemgetallen zoekt; voor dit geval wordt een nadere analyse van het geluid gegeven. Tot slot demonstreert het grammofoonplaatje, hoe de machine een menuet van Mozart zingt en hoe zij een willekeurig programma als een melodie interpreteert. Ook deze geluiden worden in het artikel nader toegelicht.

Digitized in Heiloo the Netherlands Not for sale!